Государственный университет по землеустройству

ГЕОДЕЗИЯ

(часть III)

Методические указания
по выполнению контрольных работ

Москва 2009

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Государственный университет по землеустройству

Кафедра геодезии и геоинформатики

ГЕОДЕЗИЯ

ЧАСТЬ III

Методические указания
по выполнению контрольных работ

Для студентов очного и заочного обучения по специальностям:
310900 – «Землеустройство»
311000 – «Земельный кадастр»
311100 – «Городской кадастр»

Москва 2009

УДК 528

Подготовлено и рекомендовано к печати
кафедрой геодезии и геоинформатики
Государственного университета по землеустройству
(протокол № 1 от 28 января 2009 года).

Утверждено к изданию методической комиссией
факультета городского кадастра
Государственного университета по землеустройству
(протокол № 4 от 18 февраля 2009 года).

Составители: ст. пр. Журавлев А.Ф., ст. пр. Каширкин Ю.Ю.,
ст. пр. Ктиторов Э.М., доц., к.т.н. Парамонова Е.Г.,
ст. пр., к.т.н. Симонян В.В.

Рецензент: доц., к.т.н. Лимонов А.Н.

УДК 528

Содержание методических указаний соответствует программе дисциплины «Геодезия» и помогает студентам выполнять контрольные работы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания и задания для контрольных работ по курсу “Геодезия” предназначены для студентов 2-ых курсов очных факультетов по специальностям: 310900 – «Землеустройство», 311000 – «Земельный кадастр», 311100 – «Городской кадастр» и 3-их курсов заочного факультета тех же специальностей.

Студенты-заочники, пользуясь данными методическими указаниями, должны самостоятельно изучить предусмотренные программой разделы курса “Геодезия” по рекомендуемой учебной и справочной литературе и выполнить следующие контрольные работы:

1. Тахеометрическая съемка.
2. Теория погрешностей измерений.
3. Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой.

Предварительно проверенные преподавателем контрольные работы представляются для защиты и получения допуска к экзамену в период лабораторно-экзаменационной сессии.

На очной сессии студенты прослушивают курс лекций, а также выполняют лабораторные работы по темам:

– измерение углов и линий в геодезических сетях сгущения;
– решение задач по теории погрешностей,
– определение координат отдельных пунктов;
– расчеты координат рамок трапеций топографических карт.

Изучение основных вопросов курса рекомендуется в последовательности, предлагаемой в программе. Контрольные работы следует выполнять после усвоения соответствующих разделов теории.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

1.1. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Маслов А.В., Гордеев А.В., Батраков Ю. Г. Геодезия. – М., КолосС, 2006.

2. Неумывакин Ю.К., Практикум по геодезии. – М.; КолосС, 2008.

Дополнительная

3. Батраков Ю.Г. Геодезические сети специального назначения. М.; Картгеоцентр – Геодезиздат, 1999.

4. Инструкция по развитию съемочного обоснования и съемке ситуации и рельефа с применением глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS. – М.: ЦНИИГАиК, 2002.

5 Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. – М.; ФГУП "Картгеоцентр", 2004.

6. Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации. – М., 2004 г.

7. Таблицы координат Гаусса-Крюгера и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок. – М.; Недра, 1963.

8. Условные знаки для топографических планов масштабов 1:500 – 1:5000. – М.; Недра, 1989.

1.2. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ ПРОГРАММЫ КУРСА

Раздел 1. Тахеометрическая съемка.

Раздел 2. Теория погрешностей измерений.

Раздел 3. Общие сведения о построении геодезической сети при съемке на большой территории.

Раздел 4. Плоские прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера. Номенклатура листов топографических карт.

Раздел 5. Методы измерения и приборы, применяемые при создании геодезических сетей сгущения.

Раздел 6. Методы определения положения отдельных пунктов.

Раздел 7. Уравнивание геодезических сетей сгущения.

1.3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ И УСВОЕНИЮ ОСНОВНЫХ РАЗДЕЛОВ КУРСА

Раздел 1. Перед выполнением контрольной работы №1 «Тахеометрическая съемка» необходимо изучить 8.1 – 8.5 учебника [1]. Особое внимание должно быть уделено методике проложения и обработки тахеометрических ходов выполненной тахеометрической съемки и составлению плана по её результатам. Исходные данные для выполнения контрольной работы выбираются в табл. 1 (см. приложение). Номер варианта задания равен двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если две последние цифры номера зачетной книжки обозначают число, большее пятидесяти, то номер варианта равен двум последним цифрам минус 50. Номер варианта не может превышать 50. Например, если номер зачетной книжки 20023, то номер варианта равен 23. Если же номер зачетной книжки 20065, то номер варианта 65-50=15[1].

Чтобы иметь представление об электронных тахеометрах и особенностях выполнения тахеометрической съемки электронными тахеометрами прочитать 8.7 – 8.10 учебника [1] и 11.4.2. [2].

Раздел 2. Перед выполнением контрольной работы №2 «Теория погрешностей измерений» необходимо изучить его по учебнику [1] 9.1 – 9.23.

Следует обратить внимание на определения и формулы вычисления: погрешности, дисперсии, среднеквадратических погрешностей (СКП), предельной погрешности, веса, СКП погрешности единицы веса, среднеарифметического и средневесового. Студент должен четко представлять разницу между равноточными и неравноточными измерениями, знать правила их обработки и оценки точности, уметь использовать общую формулу для оценки точности функций измеренных величин и формулы для оценки точности по невязкам в полигонах и ходах.

После изучения теоретических вопросов необходимо освоить решение типовых задач раздела 2 данных методических указаний. Только после этого следует приступать к решению контрольных задач, руководствуясь рекомендациями раздела 2.

[1] **Номер варианта остается неизменным для решения всех контрольных работ.**

Разделы 3, 4, 5, 6 изучаются по учебнику [1] (главы 10, 11, 12, 13, 15), [3], [4], [6], [7]. Студент должен разобраться со схемами и методами создания геодезических сетей, сетей сгущения и съемочных сетей.

При изучении плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера необходимо обратить особое внимание на вопросы искажения изображений длин линий и площадей, а также разобраться с номенклатурой топографических карт и планов.

Лабораторные работы по этим разделам курса студент выполняет в период сессии. При этом непосредственно перед проведением лабораторных работ по вычислению координат отдельных пунктов необходимо ознакомиться с разделом 6 настоящих методических указаний.

Раздел 7. Перед выполнением контрольной работы № 3 «Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой» необходимо изучить 18.1, 18.2 учебника [1].

2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 «ТАХЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СЪЕМКА»

2.1. ЗАДАНИЕ

По полевым материалам: журналу тахеометрической съемки и абрисам произвести необходимые вычисления и составить топографический план участка в масштабе 1: 2000 с высотой сечения рельефа горизонталями через 1 *м*.

Измерения выполнялись теодолитом 4Т30П.

Исходные данные:

– координаты и высоты исходных точек и дирекционные углы начальной и конечной сторон хода выбираются по варианту индивидуального задания (см. Приложение, табл.1);

– журнал с результатами полевых измерений – табл. 2.1.;

– абрис (рис. 2.1., 2.2.).

2.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ТАХЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА

По данным полевого журнала тахеометрической съемки (табл. 2.1.) вычислить и занести в журнал для каждой станции среднее значение горизонтального угла, место нуля *МО*, углы наклона ν, горизонтальные проложения линий и превышения *h* между точками съемочного обоснования по формулам:

$$МО = \frac{Л + П}{2}, \quad \nu = Л - МО, \quad \nu = МО - П, \quad \nu = \frac{Л - П}{2}, \qquad (2.1)$$

где *Л* – отсчет по лимбу вертикального круга при положении "круг лево";

П – отсчет по лимбу вертикального круга при положении "круг право";

МО – отсчет по лимбу вертикального круга при горизонтальном положении визирной оси и горизонтального положения оси цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга;

ν – угол наклона.

Колебания значений *МО* на данной станции не должны превышать 1,5'.

Превышения вычисляют по формуле:

$$h = \frac{1}{2} D' \sin 2\nu + i - V, \qquad (2.2)$$

где $D' = 100l + \Delta$;

l – дальномерный отсчет по рейке;

Δ – переменная величина, зависящая от расстояния между теодолитом и рейкой;

ν – угол наклона;

i – высота прибора над точкой;

V – высота визирования на рейку.

Расхождения между результатами вычислений прямых и обратных превышений допускаются не более 4 см на 100 м.

Расстояния между точками тахеометрического хода и пикетами определяли по нитяному дальномеру. Если углы наклона $\nu < |3°|$, то принимается $S = D'$. Если $\nu > |3°|$, то надо вычислять горизонтальные проложения по формуле:

$$S = D' \cos^2 \nu \qquad (2.3)$$

Таблица 2.1

Журнал тахеометрической съемки

Станция 216 *i* = 1,40 *м* *Нст.* =

Положение вертикального круга	№ точек наблюдений	Расстояние по дальномеру $D'=100l+\Delta$, (*м*)	Отсчеты по горизонтальному кругу ° ′		Горизонтальные углы (горизонтальные проложения) $S=D'\cos^2\nu$		Отсчеты по вертикальному кругу ° ′		$MO=\frac{Л+П}{2}$ $\nu=Л-MO$ $\nu=MO-П$ ° ′		Превышения $h=\frac{1}{2}D'\sin 2\nu+i-V$ (*м*)	Высоты $H=H_{ст}+h$, *м*	Примечания *V* в (*м*)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	Усово		245	39			+2	08	+0	01,0			
КП					122	15							
	○101		123	24			+0	41	+0	02,0			
					122	14,5							
	Усово		63	57			-2	06					
КЛ					122	14							
	○101	118,5	301	43			-0	37	-0	39,0	-2,81		*V* = 3,00
	○101		0	00				М0ср.	=+0	02			Высота визиро-ва-
	1	42,0	114	35			-0	38	-0	40,0	-0,49		ния на
	2	45,5	148	25			-1	52	-1	54,0	-1,51		рейку равна
	3	73,0	175	20	(72,7)		-3	38	-3	40,0	-4,66		высоте прибора
	4	74,5	223	35	(74,2)		-3	39	-3	41,0	-4,78		
	5	98,0	264	05			-2	43	-2	45,0	-4,71		(*V* = *i*)
	6	124,0	293	15			-1	53	-1	55,0	-4,75		*V* = 2,00
	7	144,5	312	45			-1	50	-1	52,0	-4,71		
	8	136,0	319	15			-1	55	-1	57,0	-4,63		
	9	124,0	311	45			-1	51	-1	53,0	-4,08		
	10	83,0	307	55			+0	03	+0	01,0	-1,58		*V* = 3,00
	11	39,5	305	55			-0	32					
	12	64,0	320	10			-0	44					
	13	58,0	274	45			-1	24					
	14	35,0	221	35			-2	14					
	15	42,0	17	40			+0	35					*V* = 3,00
	16	53,0	74	15			-1	32					
	17	80,5	59	55			-2	16					
	○101		0	02									
Станция ○101 *i* = 1,35 *м* *Нст.* =													
	216		344	29			-1	36					
КП													
	○102		121	29			-0	19					
	216	118,0	161	45			+1	37					*V* = I,82
КЛ													
	○102	157,5	298	46			+0	21					*V* = 3,00
													Высота наве-
	216		0	00				М0ср					дения на рейку

Продолжение табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	18	71,0	292	00			+0	12					равна вы-
	19	104.5	318	10			-0	11					соте прибора
	20	48,5	332	00			-1	04					*(V = i)*
	21	55,0	57	05			-1	37					
	22	108,0	79	05			-0	58					
	23	113,5	86	45			-0	56					
	24	101,5	108	05			-0	32					
	25	61,0	94	00			-0	42					
	26	76,0	124	15			-0	11					
	27	64,0	161	00			+0	35					
	28	90,0	198	30			+1	09					
	29	80,0	227	40			+1	43					*V* = 2,00
	30	32,0	225	00			+1	20					
	216		0	01									
Станция ○102 *i* = 1,33 *м* *Нст.* =													
	○101		359	10			-0	26					
КП													
	225		225	07			-0	55					
	○101	157,0	178	01			+0	27					*V* = I,78
КЛ													
	225	127,0	43	58			+0	55					*V* = 3,00
													Высота наведе-ния на рейку
	○101		0	00				M0ср					равна высоте прибора
	31	84,5	35	35			-0	07					*(V = i)*
	32	106,0	62	00			-0	29					*V* = I,50
	33	62,0	73	30			-1	01					
	34	39,5	130	00			-1	35					
	35	78,0	178	30			-0	48					
	36	59,0	223	30			+0	13					
	37	24,0	342	00			+5	01					*V* = 3,00
	38	61,0	307	30			+1	19					
	39	82,0	264	00			+0	58					
	40	128,0	283	10			+1	07					
	41	117,0	305	55			+1	15					
	○101		0	00									
Станция 225 *i* = 1,33 *м* *Нст.* =													
	○102		299	49			-0	36					
КП													
	226		191	34									
	○102	127,0	125	16			+0	36					*V* = 3,00
КЛ													
	226		17	01									

АБРИС

Станции ⊡ 216 и ⊙ 101

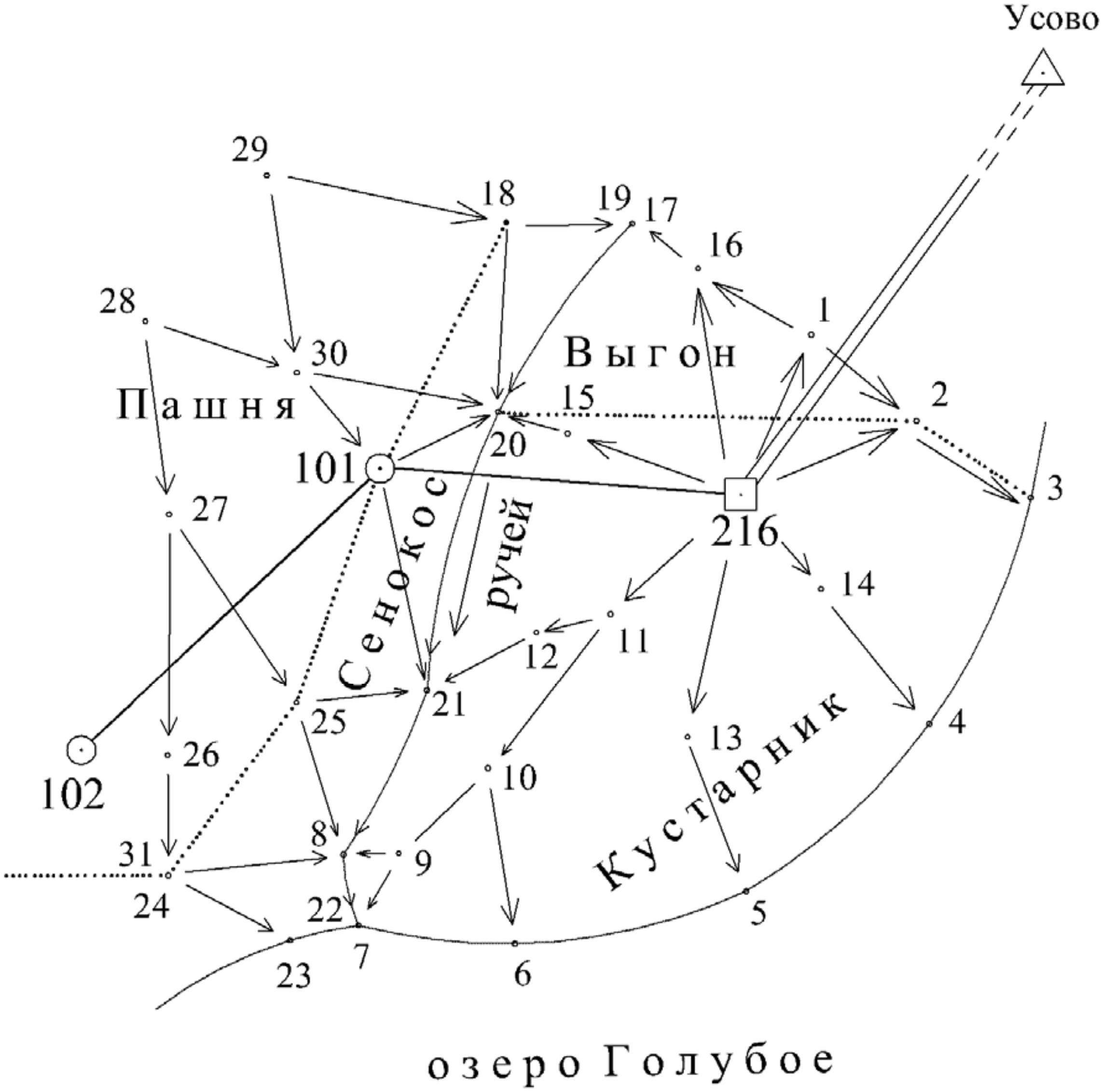


Рис. 2.1

А Б Р И С

Станция ◯102

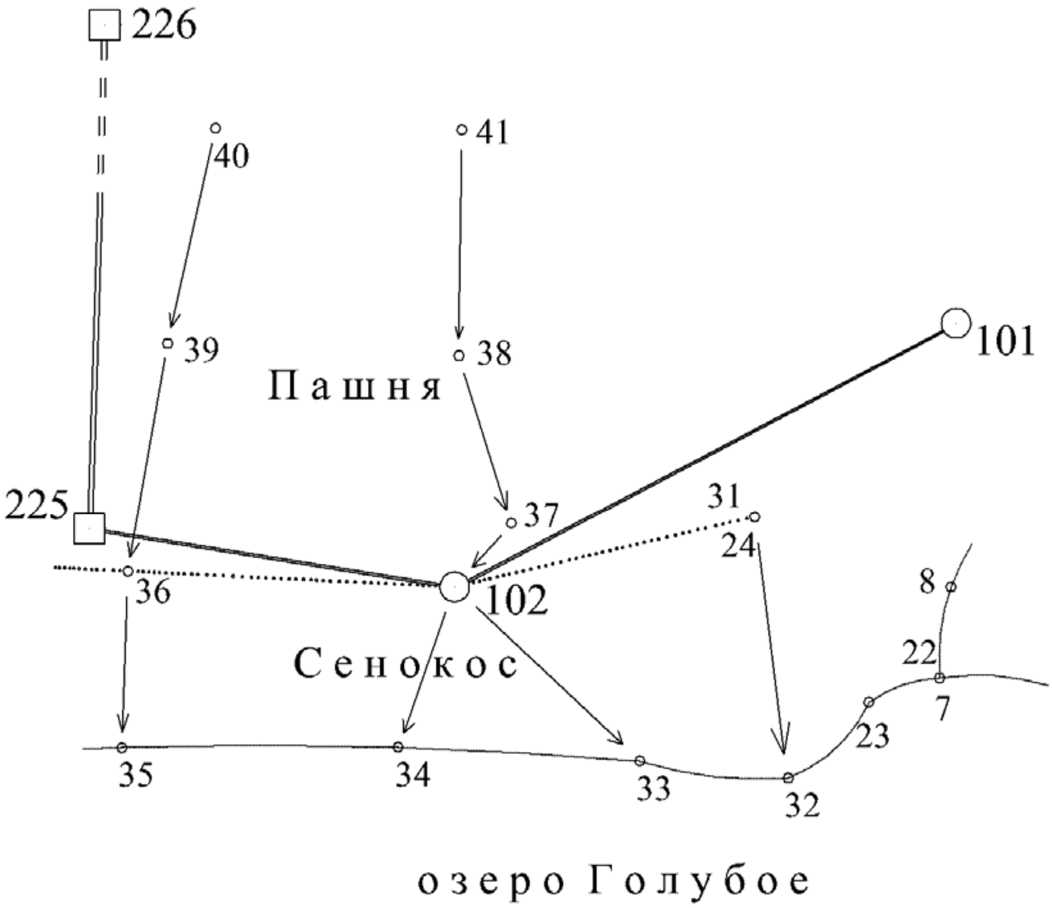


Рис. 2.2

2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ТАХЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА

В «Ведомость вычисления координат» из журнала тахеометрической съемки (табл. 2.1.) выписать средние значения горизонтальных углов и средние значения горизонтальных проложений сторон тахеометрического хода, а из табл. 1 выписать необходимые исходные данные ($\alpha_{Усово-216}$; $\alpha_{225-226}$; X_{216}; Y_{216}; X_{225}; Y_{225}).

Вычислительная обработка тахеометрического хода выполняется аналогично вычислительной обработке теодолитного хода, а допустимую абсолютную невязку хода вычисляют по формуле:

$$f_{S_{доп.}} = \frac{\sum S}{400\sqrt{n}}, \qquad (2.4)$$

где $\sum S$ – длина хода, м;

n – число сторон в ходе.

Если $f_S \le f_{Sдоп.}$, то невязки f_X и f_Y в приращениях распределяют с обратными знаками на все приращения (по соответствующей оси) пропорционально горизонтальным проложениям линий.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСОТ ТОЧЕК ТАХЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА

В "Ведомость вычисления высот точек тахеометрического хода" (табл. 2.2.) выписать:

– из табл. 1 высоты исходных пунктов H_{216} и H_{225};

– из журнала тахеометрической съемки (табл. 2.1.) средние значения горизонтальных проложениий, прямые и обратные превышения между точками тахеометрического хода. Если расхождения между прямыми и обратными значениями превышений допустимы ($\Delta h_{доп.} \le 4 см$ на $100 м$), вычислить их среднее значение с округлением до $0{,}01 м$ по формуле:

$$h_{ср.} = \frac{h_{пр.} - h_{обр.}}{2}, \qquad (2.5)$$

Допустимую невязку в сумме превышений вычислить по формуле:

$$f_{h_{доп.}} = \frac{0{,}04\sum S}{\sqrt{n}}, \text{ см}, \qquad (2.6)$$

где ΣS – длина хода, м;

n – число сторон в ходе.

Если $|f_h| \le f_{h_{доп.}}$, то выполнить уравнивание превышений (невязку распределить с обратным знаком на все средние превышения пропорционально длинам сторон хода) и вычислить высоты точек тахеометрического хода.

Таблица 2.2.

Ведомость вычисления высот точек тахеометрического хода

№ точек	Расстояние S, м	Превышения h, м					Высоты точек H, м
		прямые	обратные	средние	поправки	исправленные	
□ 216							
○ 101							
○ 201							
□ 225							

$\Sigma S =$ $\Sigma h_{пр.} =$

$\Sigma h_{т.} =$

$f_h =$

$f_{h_{доп.}} =$

2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСОТ СЪЕМОЧНЫХ ПИКЕТОВ

Из «Ведомости вычисления высот точек тахеометрического хода» (табл. 2.2.) выписать в журнал тахеометрической съемки высоты точек хода.

Вычислить последовательно углы наклона на съемочные пикеты на каждой точке хода по формуле (2.1): $\nu = Л - МО$.

Примечание:

1) Если значение *М0* < 1′, то его можно не учитывать;

2) При вычислении углов наклона на пикеты значения *М0ср.* округлить до целых минут.

Вычислить превышения на пикеты на каждой съемочной точке. Если наведение средней горизонтальной нити производилось на отсчет по рейке, равный высоте прибора (i=V), то превышение пикета относительно станции наблюдения вычисляют по сокращенной формуле:

Вычислить превышения на пикеты на каждой съемочной точке. Если наведение средней горизонтальной нити производилось на отсчет по рейке, равный высоте прибора (i=V), то превышение пикета относительно станции наблюдения вычисляют по сокращенной формуле:

$$h = \frac{1}{2} D' \sin 2\nu \,, \qquad (2.7)$$

Если наведение на рейку выполнялось на отсчет, не равный высоте прибора ($i \neq V$), то для вычислений следует использовать общую формулу (2.2). Высота визирования в этом случае записана в столбце “Примечания” журнала в строке против соответствующего пикета.

Заметим, что при углах наклона $\nu > |3°|$ необходимо вычислять горизонтальные проложения измеренных расстояний до рейки.

Вычислить высоты пикетов на каждой съемочной точке по формуле:

$$H = H_{ст.} + h \qquad (2.8)$$

и записать их в соответствующую строку журнала тахеометрической съемки.

2.6. СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА УЧАСТКА

На чертежной бумаге размером 35×45 *см* построить координатную сетку со сторонами 10 *см*. Значение подписей координат линий сетки для масштаба 1: 2000 должны быть кратны 0,2 *км*.

По координатам нанести все точки тахеометрического хода и возле каждой записать в виде дроби: в числителе - номер точки, а в знаменателе ее высоту с точностью до сотых долей метра (взятую из. табл. 2.2)

Используя геодезический транспортир и поперечный масштаб, нанести на план пикетные точки и справа записать их высоты, округленные до десятых долей метра.

По данным абриса нанести на план границы угодий, ручей, озеро.

По высотам пикетных точек выполнить интерполяцию горизонталей по направлениям, указанным на абрисах стрелками и провести горизонтали через 1*м* по высоте. Следует иметь в виду, что интерполяцию можно производить только между пикетами, соединенными стрелками, в т.ч. и по ручью.

Если между двумя пикетами проходят несколько горизонталей, то они должны находиться на одинаковом расстоянии друг от друга.

Урез воды в озере подписать как среднее арифметическое из всех значений высот уреза с округлениями до 0,1 *м*.

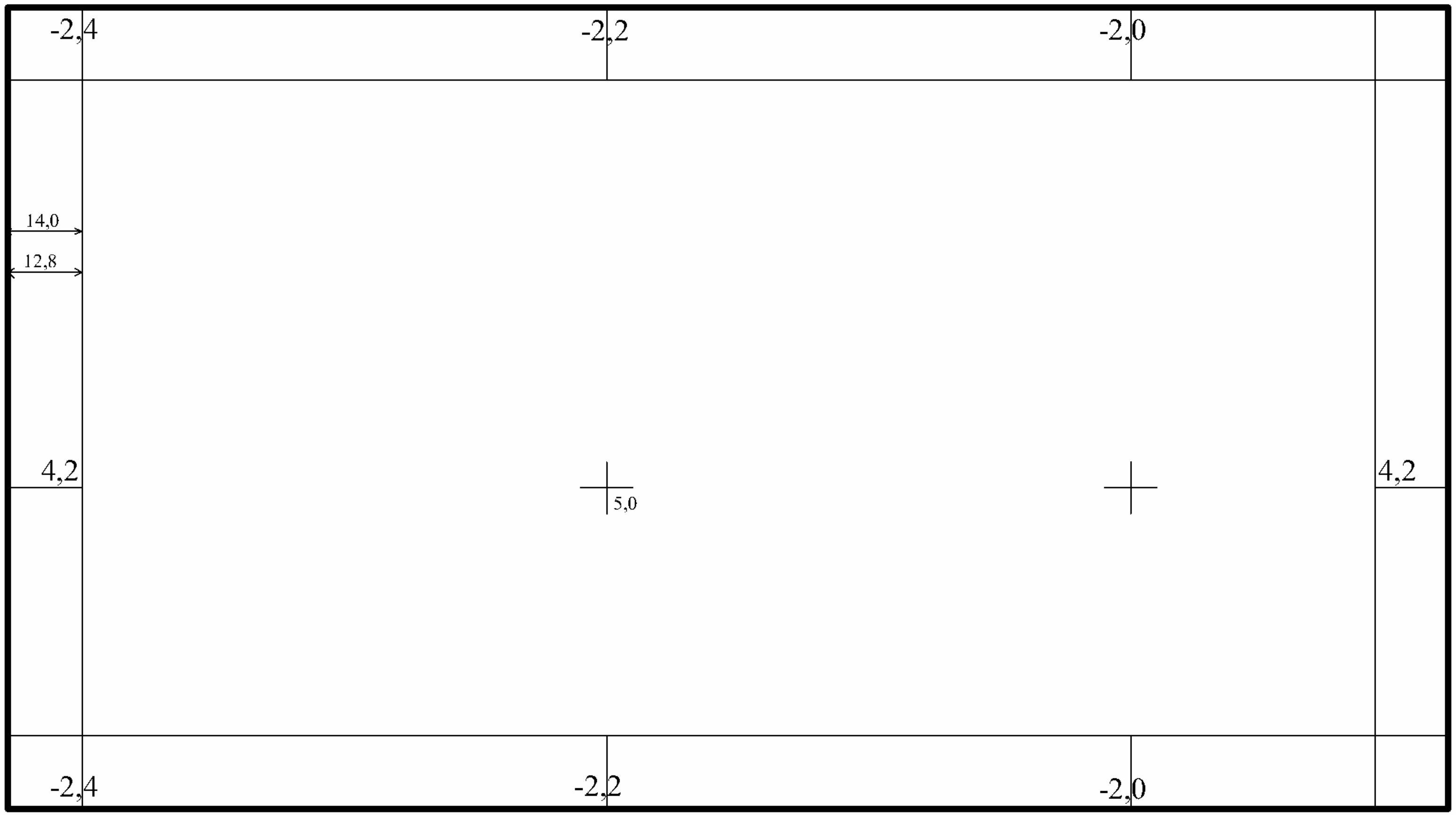
Все элементы ситуации и рельеф вычертить тушью, оформляя план в соответствии с условными знаками [8]. При этом необходимо тщательно выдерживать очертания, размеры и порядок размещения значков.

Горизонтали вычертить и подписать коричневой тушью толщиной шрифта 0,15*мм*.

Высоты точек съемочного обоснования и пикетов подписать черной тушью. Линию уреза воды в озере и ручей провести синей тушью. Рамку плана и все остальные условные знаки и надписи выполнить черной тушью.

Над северной стороной рамки подписать название. Под южной стороной рамки указать численный масштаб плана, высоту сечения рельефа и сведения о съемке. Пример оформления рамки тахеометрической съемки масштаба 1:2000 приведен на рис.2.3.

ПЛАН ТАХЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ



Выполнил: ст. 21 гр. Иванов Ф.П. 1:2000 2009 г.

Проверил: доц., к.т.н. Петров И.С. В 1 сантиметре 20 метров

Сплошные горизонтали проведены через 1 метр

Система высот Балтийская

Рис. 2.3

Вопросы для самопроверки

1. Какова цель тахеометрической съемки?

2. Как определяют при тахеометрической съемке плановое положение съемочных пикетов и их высоты?

3. В чем различие между абрисами тахеометрической и теодолитной съемок?

4. Для чего выполняют ориентировку лимба на станции?

5. По какой формуле вычисляют допустимое расхождение между прямыми и обратными горизонтальными проложениями, измеренными по нитяному дальномеру?

6. Какое допустимое расхождение между значениями прямых и обратных превышений?

7. По какой формуле вычисляют допустимую абсолютную невязку тахеометрического хода?

8. По какой формуле вычисляют допустимую невязку в сумме превышений тахеометрического хода?

9. По какой формуле вычисляют высоты пикетов?

10. По какой формуле вычисляют горизонтальные проложения, если углы наклона $\nu > |3°|$?

11. Как производят интерполирование высот на плане для проведения горизонталей?

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 «ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ»

3.1. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБРАБОТКЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для выполнения контрольной работы по теме «Теория погрешностей измерений» необходимо решить около тридцати контрольных задач.

Контрольная работа выполняется в соответствии с вариантами, указанными в табл. 2 (см. Приложение). Номер варианта определяется так же, как и в контрольной работе 1.

Для подготовки работы к защите необходимо изучить теоретический материал, относящийся к перечню вопросов, приведенных в конце раздела.

При решении контрольных задач необходимо обратить внимание на следующее:

1. При вычислении СКП и весов результатов измерений в промежуточных вычислениях следует удерживать две-три значащие цифры. Причем, в случае суммирования в наибольшем по абсолютной величине слагаемом оставлять две значащие цифры. Остальные слагаемые вычислять с тем же числом десятичных знаков, которое будет иметь наибольшее слагаемое. Окончательные значения следует округлять до двух значащих цифр.

2. Вычисления по формулам следует приводить к виду:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}},$$

тогда $$m = \sqrt{\frac{300}{6}} = 7{,}1'',$$

или $$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{300}{6}} = 7{,}1'',$$

где [ ] – символ суммы, введенный К.Ф.Гауссом.

3.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИИ ПО ИСТИННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

Для оценки точности результатов измерений применяют формулу Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{3.1}$$

где $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$ – сумма квадратов погрешностей измерений;

n – число измерений.

Истинная погрешность результата измерения Δ вычисляется по формуле:

$$\Delta = l - a, \tag{3.2}$$

где l – результат измерения;

a – истинное значение измеряемой величины.

Оценка точности определения самой погрешности m (СКП самого СКП)

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \qquad (3.3)$$

Предельную погрешность измерения $\Delta_{пред.}$ вычисляют по формуле:

$$\Delta_{пред.} = \tau \ m, \qquad (3.4)$$

где τ – коэффициент, принимающий значения в соответствии с выбранной доверительной вероятностью. Для вероятности P = 0,997 коэффициент τ = 3, поэтому следует применять формулу в виде $\Delta_{пред.} = 3m$.

Решение задач

Пример 1.

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. При этом получены результаты: 217,24; 217,31; 217,28; 217,23; 217,20 *м*. Эта же линия измерена светодальномером, что дало результат 217,236 *м*. Найти СКП измерения линии мерной лентой, если результат измерения линии светодальномером принят за точное (истинное) значение длины линии.

Решение.

Результаты расчетов сведены в таблицу 3.1 (табличная форма).

Табл. 3.1

№ п/п	Результаты измерений l, м	Погрешности измерений $\Delta = l - a$, см	Δ^2
1	217,24	+0,4	0,2
2	217,31	+7,4	54,8
3	217,28	+4,4	19,4
4	217,23	-0,6	0,4
5	217,20	-3,6	13,0

$[\Delta^2]$=87,8

СКП равна:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{87,8}{5}} = 4,2\ см.$$

СКП самой СКП

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{4,2}{\sqrt{10}} = 1,3\ см.$$

Следовательно,

$$m = 4\ см.$$

Предельная погрешность равна

$$\Delta_{пред.} = 3m = 3 \cdot 4см = 12см\ .$$

Погрешности всех пяти измерений меньше предельной погрешности, следовательно, нет оснований предполагать, что измерения имеют грубые погрешности.

Пример 2.

Площадь теодолитного полигона была измерена 8 раз планиметром (см. табл. 3.2). Та же площадь была вычислена аналитическим методом и получен результат 124,32га. Приняв этот результат за точное значение площади полигона *а,* вычислить СКП и предельную погрешности измерения площади планиметром.

Решение.

Табл. 3.2

№ п/п	Результаты измерений *Р*, *га*	Погрешности измерений $\Delta = P - a$, *га*	Δ^2
1	2	3	4
1	124,48	+0,16	0,025
2	18	-0,14	0,020
3	12	-0,20	0,040
4	22	-0,10	0,010
5	54	+0,22	0,048
6	56	+0,24	0,058
7	06	-0,26	0,068
8	40	+0,08	0,006

$[\Delta^2]=0,275$

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{0,275}{8}} = 0,1854га\ ;$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{0,1854}{\sqrt{2 \cdot 8}} = 0,05га\ ;$$

$$m = 0,19га\ ;$$

$$\Delta_{пред.} = 3 \cdot 0,19 = 0,58га\ .$$

Задача 1.

Для исследования точности измерения горизонтального угла полным приемом с помощью теодолита 3Т5КП, угол был многократно измерен. Результаты оказались следующими: 39°17,4′; 39º 16,8′; 39°16,6′; 39º16,2′; 39°15,5′; 39°15,8′; 39°16,3′; 39°16,2′.

Тот же угол был измерен высокоточным теодолитом 3Т2КП, что дало результат (см. приложение табл. 2). Приняв это значение за точное, вычислить:

– СКП измерений угла;

– определить СКП самого СКП;

– найти предельную погрешность.

Задача 2.

Дана совокупность угловых невязок в треугольниках объемом 50 единиц. На данной совокупности проверить свойства случайных погрешностей. Считая невязки истинными погрешностями, вычислить СКП и произвести оценку точности СКП, вычислить предельную погрешность.

Таблица 3.3

№	f_β''	№	f_β''	№	f_β''	№	f_β''	№	f_β''
1	+1,02	11	-1,72	21	-0,90	31	+2,80	41	-0,44
2	+0,41	12	+1,29	22	+1,22	32	-0,81	42	-0,28
3	+0,02	13	-1,81	23	-1,84	33	+1,04	43	-0,75
4	- 1,88	14	-0,08	24	-0.44	34	+0.42	44	-0.80
5	-1,44	15	-0,50	25	+0,18	35	+0.68	45	-0,95
6	-0,25	16	-1,89	26	-0.08	36	+0,55	46	-0.58
7	+0,12	17	+0,72	27	-1.11	37	+0,22	47	+1,60
8	+0,22	18	+0,24	28	+2,51	38	+1.67	48	+1,85
9	-1,05	19	-0,13	29	-1,16	39	+0,11	49	+2.22
10	+0,56	20	+0,59	30	+1,65	40	+2,08	50	-2,59

3.3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Следует обратить особое внимание на содержание этого раздела и учесть порядок определения СКП функции, вычисляемой по измеренным величинам (аргументам) с СКП, связанными с искомой величиной функционально.

Функция задана в общем виде:

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (3.5)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – аргументы, полученные из измерений с СКП m_{x_i}.

СКП функции m_u вычисляется по формуле:

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2, \qquad (3.6)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ – частные производные функции по каждому аргументу.

Порядок вычисления СКП функции общего вида следующий:

1) составляем функцию, связывающую оцениваемую величину с измеренными величинами, например (объем цилиндра):

$$V = \pi R^2 H, \qquad (3.7)$$

где R – радиус основания цилиндра, м;

H – высота цилиндра,м.

Объем цилиндра является функцией двух аргументов – радиуса и высоты, а π – постоянная;

2) применяя формулу (3.6), записываем СКП V в общем виде:

$$m_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 m_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)^2 m_H^2; \qquad (3.8)$$

3) находим частные производные:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH, \qquad \frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2; \qquad (3.9)$$

4) полученные выражения частных производных подставляем в формулу СКП функции:

$$m_V^2 = (2\pi RH)^2 m_R^2 + (\pi R^2)^2 m_H^2; \qquad (3.10)$$

5) в соответствии с условием задачи в полученную формулу подставляем числовые значения аргументов и их СКП и вычисляем величину m_V.

Решение задач

Пример 3.

Пусть проложен висячий теодолитный ход. Горизонтальные углы хода $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ измерялись независимо друг от друга в одинаковых условиях с СКП $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = ... = m_{\beta_n} = m_\beta$. Найти СКП m_{α_n}

дирекционного угла последней линии рассматриваемого хода. При этом будем считать $\alpha_{нач.}$ величиной безошибочной.

Решение.

Для определения погрешности дирекционного угла последней линии, прежде всего, необходимо представить этот дирекционный угол как функцию исходных и измеренных величин. Так как были измерены правые по ходу углы, искомый дирекционный угол может быть вычислен по формуле:

$$\alpha_n = \alpha_{нач.} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n.$$

На основании формулы (3.6) для СКП дирекционного угла последней линии хода можно записать:

$$m^2_{\alpha_n} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta_1}\right)^2 m^2_{\beta_1} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta_2}\right)^2 m^2_{\beta_2} + \ldots + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta_m}\right)^2 m^2_{\beta_n}.$$

Получим

$$m^2_{\alpha_n} = m^2_{\beta_1} + m^2_{\beta_2} + \ldots + m^2_{\beta_n} = n \cdot m^2_{\beta},$$

или

$$m_{\alpha_n} = m_\beta \sqrt{n}.$$

Окончательно можно сделать вывод, что при передаче дирекционных углов случайные погрешности накапливаются пропорционально корню квадратному из числа измеренных горизонтальных углов.

Пример 4.

Для получения горизонтального проложения линии на плане определены координаты концов этой линии, что дало результаты X_1, Y_1 и X_2, Y_2. Эти величины получены со СКП m_{X_1} и m_{Y_1}, m_{X_2} и m_{Y_2}. Необходимо вычислить горизонтальное проложение между этими точками и его СКП.

Решение

Горизонтальное проложение между точками определяют по формуле:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Применим формулу (3.6) и вычислим частные производные S по всем координатам:

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} = \frac{1}{2}\left[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(X_2 - X_1) \cdot (-1) = -\frac{X_2 - X_1}{S}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial S}{\partial X_2} = \frac{X_2 - X_1}{S}; \qquad \frac{\partial S}{\partial Y_1} = -\frac{Y_2 - Y_1}{S}; \qquad \frac{\partial S}{\partial Y_2} = \frac{Y_2 - Y_1}{S}.$$

Тогда СКП горизонтального проложения определяется формулой:

$$m_S = \sqrt{\left(\frac{X_2 - X_1}{S}\right)^2 m_{X_1}^2 + \left(\frac{X_2 - X_1}{S}\right)^2 m_{X_2}^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{S}\right)^2 m_{Y_1}^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{S}\right)^2 m_{Y_2}^2}.$$

При условии, что $m_{X_1} = m_{X_2} = m_{Y_1} = m_{Y_2} = m$, будем иметь:

$$m_S = m\sqrt{\frac{2(x_2 - x_1)^2 + 2(y_2 - y_1)^2}{S^2}} = m\sqrt{\frac{2S^2}{S^2}} = m\sqrt{2},$$

или $$m_S = m\sqrt{2}$$

Пример 5.

Для получения дирекционного угла направления между точками на плане определены координаты концов отрезка, соединяющие эти точки (X_1, Y_1; X_2, Y_2). Эти величины получены с СКП m_{X_1} и m_{Y_1} , m_{X_2} и m_{Y_2}. Необходимо вычислить дирекционный угол направления и его СКП.

Решение.

Дирекционный угол направления вычисляют по формуле:

$$\alpha = arctg\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1},$$

где X_1, Y_1, X_2, Y_2 – координаты концов отрезка.

Согласно (3.6) необходимо вычислить частные производные α по всем координатам:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right)^2} \cdot -\frac{Y_2 - Y_1}{(X_2 - X_1)^2} \cdot (-1) = \frac{(X_2 - X_1)^2 \cdot (Y_2 - Y_1)}{[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2] \cdot (X_2 - X_1)^2} = \frac{(Y_2 - Y_1)}{S^2}$$

Окончательно:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_1}=\frac{\sin\alpha}{S};$$

Аналогично найдем частные производные α по остальным координатам:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_2}=\frac{1}{1+\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}\right)^2}\cdot-\frac{Y_2-Y_1}{\left(X_2-X_1\right)^2}\cdot(+1)=-\frac{(X_2-X_1)^2\cdot(Y_2-Y_1)}{[(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2]\cdot(X_2-X_1)^2}=-\frac{(Y_2-Y_1)}{S^2}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_2}=-\frac{\sin\alpha}{S};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}\right)^2}\cdot\frac{-1}{\left(X_2-X_1\right)}=-\frac{(X_2-X_1)^2}{[(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2]\cdot(X_2-X_1)}=-\frac{(X_2-X_1)}{S^2}.$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}=-\frac{\cos\alpha}{S};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}=\frac{1}{1+\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(X_2-X_1\right)}=\frac{(X_2-X_1)^2}{[(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2]\cdot(X_2-X_1)}=\frac{(X_2-X_1)}{S^2}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}=\frac{\cos\alpha}{S}.$$

СКП дирекционного угла определяется формулой:

$$m_\alpha=\rho''\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{S}\right)^2 m_{X_1}^2+\left(\frac{\sin\alpha}{S}\right)^2 m_{X_2}^2+\left(\frac{\cos\alpha}{S}\right)^2 m_{Y_1}^2+\left(\frac{\cos\alpha}{S}\right)^2 m_{Y_2}^2},$$

где ρ'' - радианная мера угла в секундах, равная 206265".

При условии, что $m_{X_1}=m_{X_2}=m_{Y_1}=m_{Y_2}=m$, будем иметь:

$$m_\alpha=m\rho''\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{S^2}}=\frac{m\rho''}{S}\sqrt{2}.$$

Пример 6.

Вычислить приращения координат и их СКП по линии длиной 250,17 м, имеющей дирекционный угол 63°27,0', если $m_S=0{,}08 м$ и $m_\alpha=2{,}0'$.

Решение.

Известно, что приращения координат ΔX, ΔY рассчитывают по формулам $\Delta X=S\cos\alpha$ и $\Delta Y=S\sin\alpha$, что дает результаты

$\Delta X = +111{,}83 м$ и $\Delta Y = +223{,}79 м$. СКП приращений координат могут быть получены из соотношений:

$$m_{\Delta X}^2 = \left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2,$$
$$m_{\Delta Y}^2 = \left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2.$$

Найдем: $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S}$; $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha}$; $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S}$; $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha}$:

$$\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha} = -S\sin\alpha = -\Delta Y;$$
$$\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S} = \sin\alpha; \qquad \frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha} = S\cos\alpha = \Delta X.$$

Тогда:

$$m_{\Delta X}^2 = \cos^2\alpha \cdot m_S^2 + (-\Delta Y)^2 \cdot m_\alpha^2;$$
$$m_{\Delta Y}^2 = \sin^2\alpha \cdot m_S^2 + (\Delta X)^2 \cdot m_\alpha^2.$$

При вычислениях величина m_α должна быть представлена в радианной мере, но в условии задачи она задается в градусной мере. С учетом этого предыдущие формулы примут вид:

$$m_{\Delta X}^2 = \cos^2\alpha \cdot m_S^2 + (-\Delta Y)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2};$$
$$m_{\Delta Y}^2 = \sin^2\alpha \cdot m_S^2 + (\Delta X)^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}.$$

Подставив соответствующие значения величин, получаем:

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(0{,}454 \cdot 0{,}08)^2 + \left(\frac{224 \cdot 2}{3440}\right)^2} = 0{,}14 м;$$
$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(0{,}891 \cdot 0{,}08)^2 + \left(\frac{112 \cdot 2}{3440}\right)^2} = 0{,}08 м.$$

Окончательно

$$\Delta X = 111{,}83 м; \qquad m_{\Delta X} = 0{,}14 м;$$
$$\Delta Y = 223{,}79 м; \qquad m_{\Delta Y} = 0{,}08 м.$$

Задача 3.

Найти СКП превышения, полученного из геометрического нивелирования методом из середины по черным сторонам реек, принимая СКП отсчета по рейке m_0 равной 1 *мм*.

Задача 4.

Линия теодолитного хода D измерена частями с СКП $m_{D_1} = 0{,}01\,м$, $m_{D_2} = 0{,}02\,м$, $m_{D_3} = 0{,}03\,м$. Определить СКП $D = D_1 + D_2 + D_3$ длины линии D.

Задача 5.

Определить СКП превышения, вычисленного на станции геометрического нивелирования методом из середины по черным и красным сторонам реек, если СКП отсчета по рейке m_0=1*мм*.

Задача 6.

Вычислить превышение, полученное тригонометрическим нивелированием, и его предельную погрешность, если расстояние, измеренное нитяным дальномером D =210,5*м* с СКП $m_D = 0{,}8\,м$; угол наклона визирной оси при визировании на верх рейки v = ……(см. приложение табл. 2) с СКП $m_v = 0{,}5'$; высота прибора *i*= 1,30*м* с СКП $m_i = 0{,}02\,м$; длина рейки

$$V = 3{,}00м \text{ с СКП } m_V = 0{,}01 \; м.$$

Задача 7.

При определении расстояния *AB,* недоступного для измерения лентой, в треугольнике *ABC* были измерены: базис *AC*=84,55*м* с СКП базиса $m_{AC} = 0{,}03\,м$; углы А=56°27,0' и С=35°14,0' со СКП, равной m_β=0,5'.

Вычислить расстояние *AB* и ее СКП.

Задача 8.

Для вычисления угла β_2 определены координаты трех точек X_1 и Y_1, X_2 и Y_2, X_3 и Y_3. Эти величины получены со СКП $m_{X_1} = m_{Y_1} = m_{X_2} = m_{Y_2} = m_{X_3} = m_{Y_3} = m$.

Необходимо найти угол β_2, вершина которого лежит в точке 2, и его СКП.

Задача 9.

В треугольнике измерены основание a и высота h с погрешностями, соответственно равными m_a и m_h. Найти СКП площади треугольника.

Задача 10.

В треугольнике измерены две стороны a и b и угол β между ними с СКП, соответственно равными m_a, m_b и m_β. Найти СКП площади треугольника.

3.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При математической обработке ряда равноточных измерений одной и той же величины вычисляют:

1) среднеарифметическое значение измеренной величины (как наиболее надежное)

$$L = \frac{[l]}{n} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{3.11}$$

где l_0 – приближенное (как правило – наименьшее) значение измеряемой величины;

$\varepsilon = l_i - l_0$ – остатки;

n – число измерений;

2) СКП одного измерения по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}, \tag{3.12}$$

где $V = L - l_i$ – поправки к результатам измерений (уклонения от средне-арифметического);

3) СКП среднеарифметического

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}, \tag{3.13}$$

4) СКП самой СКП

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}, \tag{3.14}$$

Решение задач

Пример 7.

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. Получены следующие результаты: 217,24 *м*; 217,31 *м*; 217,38 *м*; 217,23 *м*; 217,20 *м*. Произвести математическую обработку ряда равноточных измерений.

Решение.

Таблица 3.4

№ п/п	*l, м*	ε, *см*	*V, см*	V^2	ε^2
1	2	3	4	5	6
1	217,24	+ 4	+ 3	9	16
2	31	+11	- 4	16	121
3	38	+18	-11	121	324
4	23	+ 3	+ 4	16	9
5	20	0	+ 7	49	0

$l_0 = 217{,}20 \quad [\varepsilon]=+36 \quad [V]= -1 \quad [V^2]=211 \quad [\varepsilon^2]=470$

$L = 217{,}20м + \dfrac{36см}{5} = 217{,}272м$.

$L_{ок.} = 217{,}27м$.

Контроль: $[V]=0$.

За счет округления величины L появляется ошибка округления $\omega = L_{ок.} - L = -0{,}002м = -0{,}2см$.

В этом случае контролем вычисления $L_{ок.}$ является выражение $[V] = n\omega$.

$[V]$ = 5(-0,2) = -1.

Контроль вычисления $[V^2]$:

$[V^2] = [\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}$. $\quad [V^2] = 470 - \dfrac{36^2}{5} = 211$.

СКП одного измерения будет равна

$m = \sqrt{\dfrac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{211}{4}} = 7{,}3см$.

Оценка точности СКП

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{7{,}3}{\sqrt{8}} = 2{,}6 см.$$

Следовательно, $m = 7 см$.

СКП среднеарифметического значения равна

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = 3 см.$$

Ответ: $L = 217{,}27 м \pm 0{,}03 м$.

Задача 11.

Горизонтальный угол измерен 5 раз. Получены результаты: 60°41,0'; 60º40,5'; 60°40,0'; 60°42,0'; .... (см. Приложение, табл. 2). Произвести обработку этого ряда результатов измерений.

Задача 12.

Площадь контура измерена планиметром 5 раз. Получены результаты: 26,31; 26,28; 26,32; 26,26; .… га (см. приложение табл. 2). Произвести обработку этого ряда результатов измерений.

Задача 13.

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. При этом получены результаты: 175,24; 175,31; 1175,28; 175,23; .... *м* (см. приложение табл. 2). Произвести математическую обработку результатов этого ряда измерений.

3.5. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ФУНКЦИЙ

Вес результата измерения определяют по формуле

$$p = \frac{k}{m^2}, \tag{3.15}$$

где k – произвольно выбранное число одинаковое для всех весов, участвующих в решении задачи;

m – СКП результата измерения.

Вес – относительная характеристика точности, т.е. он дает представление о точности результата измерения только при сравнении с весами других результатов измерений в данной задаче.

В качестве единицы меры дисперсий принимают СКП измерения μ, вес которой равен единице (СКП единицы веса).

Подставив в (3.11) вместо k величину μ^2, получим

$$P = \frac{\mu^2}{m^2},$$

откуда

$$\mu^2 = m^2 P$$

или

$$\mu = m\sqrt{P},$$

а

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{P}}. \qquad (3.16)$$

Величину $\frac{m^2}{\mu^2} = \frac{1}{P}$ называют обратным весом.

Заменив в формуле (3.6) величины m^2 на обратные веса, получаем формулу для вычисления веса функции измеренных величин

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_{x_i}}. \qquad (3.17)$$

Таким образом, методика определения весов функций измеренных величин такая же, что и при вычислении СКП функций измеренных величин. Формулы для определения весов функций получаются из формул для СКП тех же функций заменой величин m^2 соответствующими им обратным весом $\frac{m^2}{\mu^2} = \frac{1}{P}$.

Порядок вычисления веса функции измеренных величин следующий:

1) записывается функция в буквенном выражении;

2) определяется обратный вес этой функции по вышеизложенным правилам;

3) осуществляется переход от обратного веса к весу.

Решение задач

Пример 8.

Измерены два угла с СКП, соответственно равными

m_1=5″ и m_2= 1″.

Вычислить веса этих результатов измерений, если $k = \mu^2 = (1'')^2$.

Решение.

Веса заданных величин будут

$$p_1 = \frac{1}{25}; \qquad p_2 = \frac{1}{1} = 1,$$

а в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает угол, точность измерения которого характеризуется СКП, равной 1″.

Пример 9.

Вычислить вес дирекционного угла n - ой линии хода при условии равноточности результатов измерения углов хода и безошибочности дирекционного угла исходной стороны.

Решение.

Дирекционный угол последней линии теодолитного хода вычисляем по известной формуле

$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n$

Условие равноточности измерения углов хода требует дать всем измеренным значениям углов один и тот же вес, в частности, равный единице, т.е. $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p_\beta = 1$.

Тогда на основании формулы (3.13) записываем выражение обратного веса дирекционного угла последней линии хода. Необходимо учесть, что слагаемое $\alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n$ в предыдущей формуле принимается как безошибочная величина с нулевой дисперсией, и, следовательно, с нулевым обратным весом. На основании этого имеем

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \ldots + \frac{(-1)^2}{1} = n$$

Тогда $p_{\alpha_n} = \dfrac{1}{n}$.

Пример 10.

С плана графически сняты прямоугольные координаты x_1, y_1 начала и x_2, y_2 конца некоторого отрезка, после чего была вычислена его длина S. Принимая, что все четыре координаты были получены равноточно, вычислить вес длины этого отрезка. Сравнить полученное значение веса с весом значения непосредственного измерения линии по карте, если такое измерение выполняется с той же точностью, что и измерение любой из координат конца отрезка.

Решение.

Длина S определяется соотношением

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Учитывая, что все четыре координаты получены равноточно, то им можно приписать одинаковый вес, т.е. записать, что $p_{x_1} = p_{x_2} = p_{y_1} = p_{y_2} = 1$.

Величина S является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные S по всем координатам. Они имеют вид:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Подставляя значения частных производных в формулу обратного веса, получим

$$\frac{1}{p_S} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} = 2\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{s^2} = 2.$$

Следовательно, $p_S = \frac{1}{2}$.

Если принять, что измерение отрезка по карте выполняется с той же точностью, что и измерение любой координаты, то приходим к выводу, что получение длины S непосредственно с плана будет иметь вес, равный единице, т. е. в два раза больший, чем ее косвенное вычисление через измеренные координаты.

Задача 14.

Веса результатов измерений горизонтальных углов равны 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 соответственно. Вычислить их СКП, если известно, что СКП единицы веса $\mu = ...$ (см. Приложение, табл. 2).

Указание: при решении задачи воспользоваться формулой (3.12), связывающей P, m, μ.

Задача 15.

Найти вес невязки в сумме углов треугольника, если все углы измерены равноточно.

Задача 16.

Чему равен вес среднеарифметического значения угла, полученного из n=.... приемов (см. приложение табл. 2)?

Задача 17.

Определить вес площади прямоугольного треугольника, если катеты: a = 50 *м* и b = 80 *м* измерены с весами $P_a = 2$, $P_b = 3$.

Задача 18.

Определить вес гипотенузы прямоугольного треугольника, вычисленной по измеренным катетам: a = 60 *м* и b = 80 *м*, если $P_a = 1$ и $P_b = 0{,}5$.

Задача 19.

В треугольнике один угол получен 3 приемами, второй — 9, а третий — вычислен. Найти вес третьего угла, приняв вес измеренного одним приемом угла за единицу.

Задача 20.

Чему равен вес угла, измеренного тремя приемами, если вес угла, измеренного одним приемом, равен 1.

3.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При математической обработке неравноточных измерений одной и той же величины решаются последовательно следующие задачи:

1) определяют средневесовое значение из результатов измерений

$$L_B = \frac{[pl]}{[p]} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \tag{3.18}$$

где l_0 – приближенное (как правило – наименьшее) значение измеряемой величины;

$[p]$ – сумма весов;

2) определяют СКП единицы веса по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{n-1}}\,; \qquad (3.19)$$

3) вычисляют СКП самой СКП единицы веса

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}\,, \qquad (3.20)$$

4) вычисляют СКП средневесового значения

$$M_B = \frac{\mu}{\sqrt{P]}}\,. \qquad (3.21)$$

Для удобства вычислений применяется табличная форма.

В зависимости от условия задачи для различных видов измерений веса можно вычислять по следующим формулам:

$$P = \frac{k}{m^2} \;;\quad P = \frac{k}{L} \;;\quad P = \frac{k}{n} \;;\quad P = k \cdot n\,, \qquad (3.22)$$

где $k = \mu^2$ – произвольно выбранное число равное квадрату СКП единицы веса;

L – длина нивелирного хода в *км*;

n – число углов поворота в теодолитном ходе или число станций в нивелирном ходе.

Решение задач

Пример 11.

На заложенный грунтовый репер по четырем ходам геометрического нивелирования различной длины L_i передана высота H_i:

Таблица 3.5

№ ходов	H_i, *м*	L_i, *км*
1	134,172	8,1
2	211	4,2
3	188	5,3
4	195	6,0

Произвести математическую обработку ряда высот.

Решение.

В данной задаче неравноточность высот обусловлена различными длинами нивелирных ходов. Так как, $m_h = m_{км}\sqrt{L}$, то вес

$P = \frac{\mu^2}{m_h^2} = \frac{\mu^2}{m_{км}^2 L}$. Обозначив постоянную величину $k = \frac{\mu^2}{m_{км}^2}$, получим $P_h = \frac{k}{L}$, т.е. вес превышения по всему ходу геометрического нивелирования обратно пропорционален длине хода.

Таблица 3.6.

№ ходов	Высоты H_i, м	Длина хода L_i, км	Вес $P = \frac{k}{L}$ $k = 5$	Остатки ε, мм	$P\varepsilon$, мм	V, мм	PV, мм	PV^2	$P\varepsilon^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	134,172	8,1	0,62	0	0	+22	+13,6	299	0
2	211	4,2	1,19	+ 39	+ 46,4	-17	-20,2	344	1810
3	188	5,3	0,94	+ 16	+ 15,1	+6	+ 5,7	34	242
4	195	6,0	0,83	+ 23	+ 19,2	- 1	- 0,8	1	442

$H_0 = 134{,}172$ $[P]$=3,58 $[P\varepsilon]$ =+80,7 $[PV]$= -1,8 $[PV^2]$=678$[P\varepsilon^2]$=2494

$$H = 134{,}172м + \frac{80{,}690мм}{3{,}584} = 134{,}194511м;$$

$$H_{ок.} = 134{,}194м;$$

Контроль: $[PV]$=0.

За счет округления величины L появляется ошибка округления $\omega = H_{ок.} - H = -0{,}511мм$.

В этом случае контролем является выражение

$[PV] = \omega[P]$; $[PV]$ = -0,511·3,524 = -1,8.

Контроль вычисления $[PV^2]$:

$$[PV^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}. \quad [PV^2] = 2494 - \frac{80{,}7^2}{3{,}58} = 675.$$

СКП единицы веса будет равна (СКП превышения, полученного по ходу длиной 5*км*)

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{678}{3}} = 15{,}03мм.$$

СКП самой СКП единицы веса

$$m_\mu = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{15{,}03}{\sqrt{6}} = 6{,}1мм.$$

Следовательно,

$\mu = 15 мм$.

СКП средневесового значения равна

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \frac{15}{\sqrt{3,58}} = 8 мм.$$

Среднеквадратическая погрешность превышения, полученного по ходу длинной в 1*км*, будет

$$m_{h_{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{k}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 7 мм,$$

что соответствует IV классу геометрического нивелирования. Вес уравненного значения высоты репера равен сумме весов результатов измерений

$$P_{H_{ок.}} = [P] = 3,58.$$

Ответ: $H_{ок.} = 134,194 м \pm 8 мм$

Задача 21.

Горизонтальный угол измерен различным числом приемов. Произвести математическую обработку результатов измерений (см. Приложение, табл. 2).

Таблица 3.7

№ п/п	Значение угла	Количество приемов
1	54°12'18"	5
2	22	3
3	20	……

Задача 22.

По четырем теодолитным ходам на узловую линию передан дирекционный угол. Число горизонтальных углов поворота в каждом ходе различно. Произвести математическую обработку результатов значений дирекционных углов узловой линии (см. Приложение, табл. 2).

Таблица 3.8

№ п/п	Значение дирекционного угла	Число углов в ходах
1	271°33,5'	....
2	35,2	8
3	30,0	12
4	32,8	…….

Задача 23.

По четырем ходам геометрического нивелирования с различным числом станций была передана высота на узловой репер, что дало результаты (см. приложение табл. 2):

Таблица 3.9

№ п/п	Значение высоты репера, *м*	Число станций в ходах
1	82,631	....
2	650	20
3	618	34
4	648	.....

Произвести математическую обработку ряда значений высот.

3.7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛОВ И ПРЕВЫШЕНИЙ ПО НЕВЯЗКАМ В ПОЛИГОНАХ И ХОДАХ

Невязки в сумме углов теодолитных полигонов (ходов) являются погрешностями этих сумм, т.е. $\Delta_{[\beta]} = f_\beta$. Поэтому для оценки точности измерений по невязкам используется формула

$$\mu = \sqrt{\frac{[pf_\beta^2]}{N}}, \qquad (3.23)$$

где f_{β_i} – невязки;

N – количество невязок;

P – вес отдельного значения невязки.

Если вес вычислять по формуле

$$p = \frac{1}{n}; \qquad (3.24)$$

где n – количество углов хода, то величина СКП единицы веса μ будет равна СКП измерения одного угла

$$\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}\,. \qquad (3.25)$$

Для контроля вычисляют m_β по другой формуле

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{[n]}}\,. \qquad (3.26)$$

Невязки в суммах превышений нивелирных полигонов (ходов) являются погрешностями этих сумм. Для вычисления СКП превышения по ходу длиной в 1 *км* используют формулу

$$\mu = m_{h_{км}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right]}{N}}\,, \qquad (3.27)$$

где f_{h_i} – невязки, веса которых

$$P_i = \frac{1}{L_i}\,, \qquad (3.28)$$

L_i – периметры полигонов (ходов) в *км*.

Контрольная формула: $m_{h_{км}} = \sqrt{\frac{[f_h^2]}{[L]}}\,.$ (3.29)

При значительных углах наклона местности, когда число станций на 1*км* периметра полигона превышает 25, для вычисления СКП превышения по ходу длиной в 1 *км* используют формулу

$$\mu = m_{h_{км}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{n}\right]}{N}}\,, \qquad (3.30)$$

где n – число станций (штативов) в полигоне (ходе).

Веса невязок в этом случае вычисляют по формуле

$$P_i = \frac{1}{n_i}\,. \qquad (3.31)$$

Контрольная формула $m_{h_{км}} = \sqrt{\frac{[f_h^2]}{[n]}}\,.$ (3.32)

Решение задач

Пример 12.

Произвести оценку точности нивелирования по невязкам полигонов, указанным в таблице.

Таблица 3.10

№ полигонов	Невязки f_h, мм	Число станций, n	f_h^2	$\frac{f_h^2}{n}$
1	2	3	4	5
1	+32	72	1024	14
2	+2	32	4	0
3	-21	46	441	10
4	+ 6	27	36	1
5	+ 8	38	64	2
6	-12	49	144	3
7	-31	63	961	15
8	+15	51	225	4

$$[n]=378 \quad [f_h^2]=2899 \quad \left[\frac{f_h^2}{n}\right]=49$$

В данном случае СКП единицы веса есть СКП превышения на 1*км* хода

$$\mu = m_{h\,ст.} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{n}\right]}{N}} = \sqrt{\frac{49}{8}} = 2{,}5мм.$$

Контроль: $$m_{h\,ст.} = \sqrt{\frac{[f_h^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{2899}{378}} = 2{,}8мм$$

Считая, что в среднем на 1 *км* хода приходится 10 станций, получим СКП превышения на 1 *км* по формуле

$$m_{h\,км} = m_{h\,ст.}\sqrt{10} = 2{,}5\sqrt{10} = 7{,}9мм.$$

Задача 24.

В таблице приведены невязки в полигонах геометрического нивелирования и периметры полигонов. Оценить точность нивелирования.

Таблица 3.11

№ пол-ов	L, *км*	f_h, *мм*
1	6	+18
2	12	-14
3	8	-24
4	10	+30
5	15	+34

Задача 25.

Произвести оценку точности измерения горизонтальных углов в замкнутом теодолитном ходе по невязкам в полигонах.

Таблица 3.12

№ полигонов	Число углов в полигонах	f_β
1	20	-2.5'
2	24	+4,8
3	10	-0.5
4	31	-2.8
5	15	+3.0
6	28	+5.2

Задача 26.

По невязкам в треугольниках сети триангуляции произвести оценку точности угловых измерений.

Таблица 3.13

№ треугольников	Невязки f_β	№ треугольников	Невязки f_β
1	+10"	5	+2"
2	- 9	6	-8
3	-5	7	+6
4	+ 2	8	+6

3.8. ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕАРИФМЕТИЧЕСКОГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Доверительным называется интервал I_β, который с заданной надежностью β покрывает оцениваемый параметр. Для оценки математического ожидания $\overline{M}$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону, при известной дисперсии $\overline{D}$ служит доверительный интервал

$$I_\beta = \overline{M} - \varepsilon_\beta < \overline{M} < \overline{M} + \varepsilon_\beta\,, \qquad (3.33)$$

где $\varepsilon_\beta = t\sqrt{\dfrac{\overline{D}}{n}}$ – точность оценки;

n – объем выборки;

$\overline{M}$ – математическое ожидание;

β – доверительная вероятность;

t_β – аргумент функции Лапласа;

$\overline{M} - \varepsilon_\beta$ и $\overline{M} + \varepsilon_\beta$ – границы доверительного интервала.

Пример 13.

Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X при $\overline{D} = 1109{,}94\,мм^2$. Имеем:

Таблица 3.14

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M_x(X)$	50,91	50,23	49,51	48,79	48,10	47,38	46,60	47,47	50,95	54,35	57,33	57,57

В качестве исходного положения примем $\Delta_{пред.} = 3\sigma$,

где $\Delta_{пред.}$ - предельная величина погрешности измерения.

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_x(X)}{n} = \frac{609{,}21}{12} = 50{,}767\,мм.$$

По табл. 3 (см. Приложение) для $n-1=11$ и $\beta = 0{,}99$ находим $t_\beta = 3{,}11$, откуда

$$\varepsilon_\beta = t_\beta\sqrt{\frac{\overline{D}}{n}} = 3{,}11\sqrt{\frac{1109{,}94}{15}} = 29{,}910.$$

Доверительный интервал будет

$$I_\beta = (\overline{M} - \varepsilon_\beta < \overline{M} < \overline{M} + \varepsilon_\beta) = (20{,}857 < \overline{M} < 80{,}677)\,.$$

Задача 27.

Произведено 16 измерений теодолитом 4Т30П горизонтального угла полным приемом, со СКП 0,5'. Найдите доверительный интервал погрешностей теодолита с надежностью β=0,95. Предполагается, что погрешности измерений распределены нормальному закону.

Задача 28.

Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным СКП $m = 1$. Найдите доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания по выборочным средним $\overline{M} = 3{,}4$,, если объем выборки n=25 и задана надежность оценки β=0,9.

Задача 29.

Решить задачи 13, 14 и 15 с использованием доверительных интервалов.

3.9. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

3.9.1. ОКРУГЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

В приближенных вычислениях часто приходиться округлять числа (как приближенные, так и точные), т.е. отбрасывать одну или несколько последних цифр. Чтобы обеспечить наибольшую близость округленного числа к округляемому, соблюдаются следующие правила:

– если первая из отбрасываемых цифр больше или равняется 5, то последняя из сохраняемых цифр усиливается, т. е. увеличивается на единицу;

– если первая из отбрасываемых цифр меньше, чем 5, то усиление не делается;

– если отбрасываемая цифра 5, а за ней нет значащих цифр, то округление производится на ближайшее четное число (правило Гаусса), т.е. последняя цифра остается неизменной, если она четная и усиливается, если – нечетная.

Пример: 15,458 ≈15,46;   22,144 ≈ 22,14;   36,655 ≈ 36,66.

3.9.2. ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Точность приближенных чисел определяется числом значащих цифр. Например: число 28,3 имеет три значащих цифры.

Число 0,00422 имеет тоже три значащих цифры. Число 1,06005 имеет шесть значащих цифр. Число 2500,0 имеет пять значащих цифр, так как оно верно до десятых долей единицы.

Если вместо числа 25643 взять число 26000, то говорят, что в округленном числе имеется две значащие цифры; рекомендуемая запись этого числа — 26×10^3.

3.9.3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Точность измерений характеризуется погрешностями измерений. Погрешностью измерения Δ называют разность между измеренным l и ее точным значением a, т.е.

$$\Delta = l - a\,. \tag{3.34}$$

Погрешность Δ называется абсолютной.

Отношение погрешности к измеренной величине, выраженное дробью, в числителе которой единица, называют относительной погрешностью

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{1}{T}\,. \tag{3.35}$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие измерения называют равноточными?
2. Что называется погрешностью измерений?
3. Как классифицируются погрешности измерений?
4. Какими свойствами обладают случайные погрешности?
5. Что называется СКП?
6. Что называется предельной погрешностью измерения?
7. По какой формуле вычисляется СКП линейной функции измеренных величин?
8. По какой формуле вычисляется СКП функции общего вида?
9. Чему равна СКП алгебраической суммы измеренных величин в случае равноточных измерений?
10. Что называется арифметической серединой или средне-арифметическим значением?

11. По какой формуле вычисляется СКП одного измерения, если имеется ряд результатов равноточных измерений одной и той же величины, точное значение которой неизвестно?

12. Во сколько раз СКП арифметической середины меньше СКП одного измерения, имея в виду равноточные измерения одной и той же величины?

13. Какие измерения называются неравноточными?

14. Что называется весом результата измерения?

15. Какими свойствами обладают веса результатов измерений?

16. Что называется СКП единицы веса?

17. Что такое обратный вес?

18. По какой формуле вычисляется обратный вес линейной функции измеренных величин?

19. По какой формуле вычисляется обратный вес функции общего вида?

20. Чему равен вес алгебраической суммы измеренных величин, если вес каждого измерения равен единице?

21. Чему равен вес арифметической середины, если вес каждого измерения равен единице?

22. Что называется общей арифметической серединой или средневесовым значением?

23. Что называют вероятнейшим значением измеряемой величины в случае неравноточных измерений этой величины?

24. Чему равен вес общей арифметической середины?

25. По какой формуле вычисляется СКП единицы веса, если известны погрешности результатов измерений и их веса?

26. По какой формуле вычисляется СКП общей арифметической середины, если известны СКП единицы веса и веса результатов измерений?

27. Что называется математической обработкой результатов неравноточных измерений одной и той же величины?

28. По какой формуле вычисляется СКП измерения угла, если даны невязки в полигонах или ходах?

29. По какой формуле вычисляется СКП нивелирования на 1*км* хода, если известны невязки в полигонах или ходах?

30. Что называется доверительным интервалом и доверительной вероятностью?

31. Каков смысл доверительного интервала?

32. Дайте общую схему построения доверительного интервала.

33. Как изменяется доверительный интервал с увеличением надежности?

34. Как изменяется доверительный интервал с увеличением объема выборки?

35. Как изменяется доверительный интервал в зависимости от того, известны ли другие параметры точно или нет?

36. Как построить доверительный интервал при известном математическом ожидании?

37. Как построить доверительный интервал при неизвестном математическом ожидании?

4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3 «УРАВНИВАНИЕ СИСТЕМЫ ТЕОДОЛИТНЫХ ХОДОВ С ОДНОЙ УЗЛОВОЙ ТОЧКОЙ»

4.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если плотность пунктов опорной плановой геодезической сети недостаточна для выполнения топографических съемок, то сеть сгущают путем развития планово-высотного съемочного обоснования, например, проложением теодолитных ходов.

На практике возможно появление ситуаций, когда в геодезических построениях имеются избыточные измерения и возникает неоднозначность получения координат пунктов.

Рассмотрим геодезическое построение в виде системы трех теодолитных ходов с одной узловой точкой. Практическая необходимость построения такой системы обусловлена невозможностью определения положения пунктов путем проложения одного теодолитного хода (например, из-за отсутствия на местности необходимой видимости). Ограничивающим фактором может быть также превышение допустимой длины одиночного теодолитного хода или нарушение каких-либо других нормативных требований.

Способы уравнивания разделяются на строгие, когда уравнивание выполняют под условием минимума суммы квадратов поправок в измеренные величины $[PV^2] = min$, и нестрогие (раздельные), когда сначала уравнивают углы, а затем приращения координат.

При выборе способа уравнивания исходят, прежде всего, из необходимой точности получения координат пунктов. Если раздельное уравнивание обеспечивает указанное требование, то его применение предпочтительно, т.к. это упрощает процесс вычислений.

4.2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Схема сети и результаты полевых измерений показаны на рис. 4.1. В соответствии с вариантом индивидуального задания (см. табл. 4. Приложения), на схеме изменяют значения длины линии и угла. Координаты исходных пунктов представлены в табл. 5 (см. Приложение). Координаты исходных пунктов изменяются в зависимости от варианта по формулам:

$$X_{новая} = X_{исходная} + 10n\cos 5^{\circ} n \quad \text{и} \quad Y_{новая} = Y_{исходная} + 10n\sin 5^{\circ} n\,,$$

где n – номер варианта.

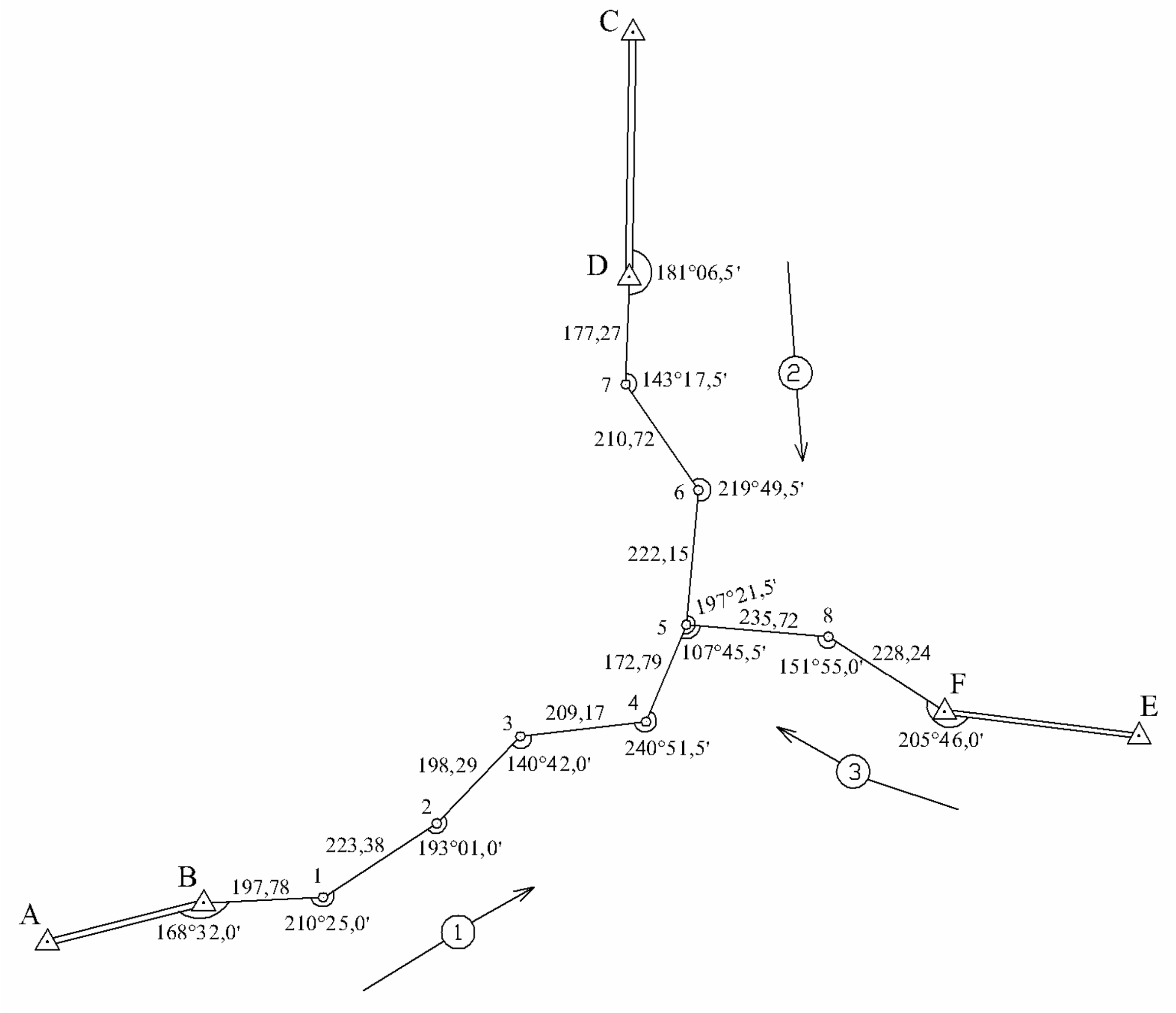


Рис. 4.1

4.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Составляют схематический чертеж согласно заданному варианту. Уравнивание углов выполняется в следующем порядке.

4.3.1. Выбирают узловую линию, т.е. линию, примыкающую к узловой точке 5. При выборе в качестве узловой линии 4-5 (что рекомендуется сделать), решаемая система разделится на три одиночных теодолитных хода, которые опираются на исходные пункты.

4.3.2. Для каждого хода по координатам исходных пунктов решают обратные геодезические задачи и находят исходные дирекционные углы. Со схемы ходов выписывают в ведомость координат измеренные и исходные дирекционные углы по трем одиночным ходам. Подсчитывают суммы измеренных углов по каждому ходу.

4.3.3. Находят значения дирекционных углов узловой линии по каждому ходу по формулам:

$$\alpha_{4-5} = \alpha_{i_{исх.}} + 180^\circ n_i - [\beta]_i \text{, или } \alpha_{4-5} = \alpha_{i_{исх.}} + [\lambda]_i - 180^\circ n_i \qquad (4.1)$$

где $\alpha_{i_{исх.}} = \alpha_{AB}$; α_{CD}; α_{EF};

n - число углов, входящих в сумму $[\beta]_i$ и $[\lambda]_i$;

$[\beta]_i$ – сумма углов правых по ходу;

$[\lambda]_i$ – сумма углов левых по ходу.

Результаты вычислений выписывают в графу 2 табл. 4.1. Попутно в графу 3 записывают число углов n по каждому ходу.

Таблица 4.1

Вычисление окончательного значения дирекционного угла узловой линии α_{4-5}

№ хо-да	α_{4-5}	n	$p = \frac{k}{n}$ $k =$	ε	$p\varepsilon$	f_β	pf_β	pf_β^2	Проверка допустимости невязок
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 2 3									

4.3.4. Прежде чем приступить к нахождению средневесового значения дирекционного угла α_{4-5} узловой линии необходимо проверить качество угловых измерений в теодолитных ходах. Для этого составляют разности вычисленных дирекционных углов и получают невязки. Первую разность составляют из дирекционных углов по двум ходам с наименьшим числом углов. Другую - из дирекционных углов, вычисленных по третьему ходу и одному из двух первых по формулам:

$$f_{\beta_{1+2}} = \alpha_2 - \alpha_1, \quad f_{\beta_{2+3}} = \alpha_3 - \alpha_2. \tag{4.2}$$

Невязки записывают в графу 7 табл. 4.1 и сравнивают с допустимыми значениями невязок, которые находят по формуле:

$$f_{\beta_{i+j}} = 1'\sqrt{n_i + n_j}\,, \tag{4.3}$$

где n_i и n_j - количество углов в i-ом и j-ом ходах.

Результаты вычислений записывают в графу 10 табл. 4.1.

При допустимости невязок, производят уравнивание дирекционных углов.

Определяют веса вычисленных значений дирекционных углов узловой линии по формуле:

$$p_i = \frac{k}{n_i}, \tag{4.4}$$

где k – произвольный коэффициент, выбираемый так, чтобы веса выражались числами, близкими к единице. Веса записывают в графу 4 табл. 4.1 с округлением до 0,01.

Вычисляют средневесовое значение дирекционного угла узловой линии

$$\alpha_{4-5}^{ок.} = \frac{[p\alpha]}{[p]} = \alpha_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \tag{4.5}$$

где ε_i – остатки, вычисляемые по формуле

$$\varepsilon_i = \alpha_i - \alpha_0 \ (i = 1, 2, 3). \tag{4.6}$$

После этого определяют угловые невязки по всем трем ходам по значениям дирекционного угла узловой линии для правых углов по ходу

$$f_{\beta_i} = \alpha_{4-5}^{ок.} - \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{4.7}$$

а для левых углов по ходу

$$f_{\lambda_i} = \alpha_i - \alpha_{4-5}^{ок.} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.8}$$

Контроль правильности вычисления дирекционного угла $\alpha_{4-5}^{ок.}$ и невязок f_{β_i} проверяют по формулам

$$[Pf_\beta] = 0\text{, или } [Pf_\lambda] = 0.$$

За счет округления величины $\alpha_{4-5}^{ок.}$ появляется ошибка округления $\omega = \alpha_{4-5}^{ок.} - \alpha_{4-5}$. Для определения ω следует при делении $\frac{[P\varepsilon]}{[P]}$ в результате удерживать две дополнительные цифры.

В этом случае контролем является выражение

$$[Pf] = \omega\,[P].$$

Если в ходе имеются и правые и левые углы, то надо изменить знак произведений Pf в столбце 8 табл. 4.1 на противоположный, чтобы все произведения соответствовали только правым или только левым углам.

4.3.5. СКП измерения угла вычисляют по формуле

$$m_\beta = \frac{\mu}{\sqrt{k}}, \tag{4.9}$$

где μ – СКП, вычисляемая по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pf_\beta^2]}{N-1}}, \tag{4.10}$$

где N – количество ходов.

4.3.6. Полученное окончательное значение дирекционного угла узловой линии принимают за исходное и записывают в графу «Дирекционные углы» Ведомости вычисления координат.

Вычисляют теоретические суммы углов по каждому ходу, которые записывают в графу 2 Ведомости вычисления координат. После этого вновь вычисляют невязки и сличают их с полученными в графе 7 табл. 4.1.

Полученные невязки распределяют с противоположным знаком поровну на углы соответствующих ходов (с округлением до 0,1′).

Для проверки правильности распределения невязок подсчитывают суммы исправленных углов. Они должны быть равны теоретическим суммам по каждому ходу.

По исправленным углам вычисляют дирекционные углы всех линий.

После этого переходят к уравниванию приращений координат.

4.3.7. Со схемы ходов выписывают в ведомость координат горизонтальные проложения сторон теодолитных ходов и координаты начальных исходных пунктов. Вычисляют приращения координат и их суммы по каждому ходу, а затем – координаты узловой точки по всем трем ходам по формулам

$$X_5 = X_{i_{исх.}} + [\Delta X]_i; \quad Y_5 = Y_{i_{исх.}} + [\Delta Y]_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.11}$$

Результаты вычислений записывают в табл. 4.2. по вычислению окончательных значений координат узловой точки 5.

Таблица 4.2

Вычисление окончательных значений координат узловой точки 5.

№ п/п	X_5 м	ε_{X_i} см	$p_i\varepsilon_{X_i}$ см	f_{X_i} см	$p_i f_{X_i}$ см	$p_i f_{X_i}^2$	L_i км	$p_i = \frac{k}{L_i}$ k =	$p_i f_{Y_i}^2$	$p_i f_{Y_i}$ см	f_{Y_i} см	$p_i\varepsilon_{Y_i}$ см	ε_{Y_i} см	Y_5 м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 2 3														

Для установления качества измерений длин сторон теодолитных ходов вычисляют относительные невязки по ходам: по первому вместе со вторым и по второму вместе с третьим. С этой целью составляют разности координат по соответствующим парам ходов; одна пара ходов берется с наименьшими длинами. При этом применяются следующие формулы:

$$f_{X_{1+2}} = X_1 - X_2; \qquad f_{Y_{1+2}} = Y_1 - Y_2; \tag{4.12}$$

$$f_{L_{1+2}} = \sqrt{f_{X_{1+2}}^2 + f_{Y_{1+2}}^2}; \qquad \frac{f_{L_{1+2}}}{L_{1+2}}; \tag{4.13}$$

$$f_{X_{2+3}} = X_2 - X_3; \qquad f_{Y_{2+3}} = Y_2 - Y_3; \tag{4.14}$$

$$f_{L_{2+3}} = \sqrt{f^2_{X_{2+3}} + f^2_{Y_{2+3}}}\ ; \quad \frac{f_{L_{2+3}}}{L_{2+3}}, \tag{4.15}$$

где L_{i+j} – периметр i -ого и j -того ходов;

$f_{L_{i+j}}$ – невязка в периметре i -ого и j -того ходов.

Значения невязок приводят в таблице 4.3.

Таблица 4.3

	S, м	Невязка			
		f_X	f_Y	$f_{абс.}$	$\frac{f_L}{L}$
1+2					
2+3					

Относительные невязки не должны превышать 1:2000.

4.3.8. Выяснив, что невязки допустимы, вычисляют веса координат узловой точки

$$P_i = \frac{k}{L_i} \quad (i = 1,2,3), \tag{4.16}$$

где L_i – длина i–ого хода, выраженная в километрах,

k – произвольный коэффициент, выбираемый с таким расчетом, как и при вычислении дирекционных углов.

Результаты вычислений записывают в графу 9 табл. 4.2.

Затем находят средневесовое (окончательное) значение координат узловой точки

$$X_5^{ок.} = \frac{[PX]}{[P]} = X_0 + \frac{[P\varepsilon_X]}{[P]}; \quad Y_5^{ок.} = \frac{[PY]}{[P]} = Y_0 + \frac{[P\varepsilon_Y]}{[P]}. \tag{4.17}$$

4.3.9. По этим координатам вычисляют невязки в приращениях по каждому ходу

$$f_{X_i} = X_i - X_5^{ок.}; \qquad f_{Y_i} = Y_i - Y_5^{ок.}. \tag{4.18}$$

Правильность вычисления средневесового значения координат узловой точки и невязок в приращениях по ходам контролируют по формулам

$$[Pf_X]=0; \quad [Pf_Y]=0. \tag{4.19}$$

За счет округления величин X_5 и Y_5 появляются ошибки округления $\omega_X = X_5^{ок.} - X_5$ и $\omega_Y = Y_5^{ок.} - Y_5$.

В этом случае контролирующими являются выражения

$$[Pf_X]=\omega_X[P] \text{ и } [Pf_Y]=\omega_Y[P].$$

4.3.10. Производят оценку точности планового положения узловой точки. Для этого:

– вычисляют СКП единицы веса

$$\mu_X=\sqrt{\frac{[Pf_X^2]}{N-1}}; \quad \mu_Y=\sqrt{\frac{[Pf_Y^2]}{N-1}}; \tag{4.20}$$

– вычисляют СКП абсцисс и ординат

$$m_X=\frac{\mu_X}{\sqrt{[P]}}; \quad m_Y=\frac{\mu_Y}{\sqrt{[P]}}; \tag{4.21}$$

– вычисляют СКП планового положения узловой точки

$$M=\sqrt{m_X^2+m_Y^2}. \tag{4.22}$$

4.3.11. Координаты узловой точки выписывают в ведомость вычисления координат и традиционным способом уравнивают приращения и вычисляют координаты точек в каждом ходе.

Вопросы для самопроверки

1. По какой формуле вычисляется дирекционный угол узловой линии при передаче его от исходной стороны по ходу с левыми (правыми) углами?

2. По какой формуле вычисляется окончательное значение дирекционного угла узловой линии?

3. Как вычисляется угловая невязка в ходе, если известны значения дирекционного угла узловой линии - окончательное и вычисленное по ходу, если углы в ходе левые (правые)?

4. Как контролируется доброкачественность угловых измерений в сети?

5. По какой формуле вычисляется вес дирекционного угла узловой линии, полученный по ходу?

6. В чем состоит контроль правильности вычисления угловых невязок в ходах, сходящихся к узловой точке?

7. Как распределяются угловые невязки на углы в каждом теодолитном ходе?

8. По какой формуле вычисляется вес координаты узловой точки?

9. По каким формулам вычисляются окончательные значения координат узловой точки?

10. Как вычисляются невязки в приращениях координат в каждом ходе, если известны значения координат узловой точки, вычисленные по ходу и окончательные?

11. Как контролируется доброкачественность линейных измерений в системе ходов?

12. В чем состоит контроль правильности вычисления невязок в приращениях координат по каждому ходу?

13. Как распределяются невязки в приращениях координат внутри каждого хода?

14. Как производится оценка точности планового положения узловой точки?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Варианты индивидуальных заданий для выполнения контрольной работы 1 - «Тахеометрическая съемка»

№ п/п	$\alpha_{Усово-216}$ ° ′	$\alpha_{225-226}$ ° ′	X_{225}, м	Y_{225}, м	H_{225}, м	H_{216}, м
1	2	3	4	5	6	7
1	221 11,0	353 41,0	4212,40	- 2380,84	209,19	212,45
2	221 16,5	353 46,5	4212,94	- 2380,90	210,19	213,45
3	221 21,0	353 51,0	4213,48	- 2380,96	211,27	214,53
4	221 26,5	353 56,5	4214,02	- 2381,02	212,35	215,61
5	221 31,0	354 01,0	4214,56	- 2381,08	213,43	216,69
6	221 36,5	354 06,5	4215,10	- 2381,14	214,51	217,77
7	221 41,0	354 11,0	4215,64	- 2381,20	215,59	218,85
8	221 46,5	354 16,5	4216,18	- 2381,26	216,67	219,93
9	221 51,0	354 21,0	4216,72	- 2381,32	217,75	221,01
10	221 56,5	354 26,5	4217,26	- 2381,38	218,83	222,09
11	222 01,0	354 31,0	4217,80	- 2381,44	219,91	223,17
12	222 06,5	354 36,5	4218,34	- 2381,50	220,99	224,25
13	222 11,0	354 41,0	4218,89	- 2381,54	222,07	225,33
14	222 16,5	354 46,5	4219,43	- 2381,59	223,15	226,41
15	222 21,0	354 51,0	4219,97	- 2381,64	224,23	227,49
16	222 26,5	354 56,5	4220,51	- 2381,69	225,31	228,57
17	222 31,0	355 01,0	4221,05	- 2381,74	226,39	229,65
18	222 36,5	355 06,5	4221,59	- 2381,79	227,47	230,73
19	222 41,0	355 11,0	4222,13	- 2381,84	228,55	231,81
20	222 46,5	355 16,5	4222,67	- 2381,89	229,63	232,89
21	222 51,0	355 21,0	4223,21	- 2381,94	230,71	233,97
22	222 56,5	355 26,5	4223,75	- 2381,99	231,79	235,05
23	223 01,0	355 31,0	4224,29	- 2382,04	232,87	236,13
24	223 06,5	355 36,5	4224,83	- 2382,09	233,95	237,21

Продолжение табл.1

1	2	3	4	5	6	7
25	223 11,0	355 41,0	4225,37	- 2382,14	235,03	238,29
26	223 16,5	355 46,5	4225,91	- 2382,19	236,11	239,37
27	223 21,0	355 51,0	4226,45	- 2382,24	237,19	240,45
28	223 26,5	355 56,5	4226,99	- 2382,29	238,27	241,53
29	223 31,0	356 01,0	4227,53	- 2382,34	239,35	242,61
30	223 36,5	356 06,5	4228,07	- 2382,39	240,43	243,69
31	223 41,0	356 11,0	4228,61	- 2382,44	241,51	244,77
32	223 46,5	356 16,5	4229,15	- 2382,49	242,59	245,85
33	223 51,0	356 21,0	4229,69	- 2382,54	243,67	246,93
34	223 56,5	356 26,5	4230,29	- 2382,59	244,75	248,01
35	224 01,0	356 31,0	4230,77	- 2382,64	245,83	249,09
36	224 06,5	356 36,5	4231,31	- 2382,69	246,91	250,17
37	224 11,0	356 41,0	4231,85	- 2382,74	247,99	251,25
38	224 16,5	356 46,5	4232,39	- 2382,79	249,07	252,33
39	224 21,0	356 51,0	4232,93	- 2382,84	250,15	253,41
40	224 26,5	356 56,5	4233,47	- 2382,89	251,23	254,49
41	224 31,0	357 01,0	4234,01	- 2382,94	252,31	255,57
42	224 36,5	357 06,5	4234,55	- 2382,99	253,39	256,65
43	224 41,0	357 11,0	4235,09	- 2383,04	254,47	257,73
44	224 46,5	357 16,5	4235,63	- 2383,09	255,55	258,81
45	224 51,0	357 21,0	4236,17	- 2383,14	256,63	259,89
46	224 56,5	357 26,5	4236,71	- 2383,19	257,71	260,97
47	225 01,0	357 31,0	4237,25	- 2383,24	257,79	261,05
48	225 06,5	357 36,5	4237,79	- 2383,29	258,87	262,13
49	225 11,0	357 41,0	4238,33	- 2383,34	259,95	263,21
50	225 16,5	357 46,5	4238,87	- 2383,39	261,03	264,29

$X_{216} = +4255{,}70 м$, $Y_{216} = -2008{,}99 м$.[2]

[2] **Координаты т. *216* одинаковые для всех вариантов.**

Таблица 2

Варианты индивидуальных задач для выполнения контрольной работы 2 - «Теория погрешностей измерений»

№ п/п	1	6	13	14	15	16	18	23	24	25
1	39º16'00"	+ 2º30'	60º41,0'	26,25 *га*	175,10 *м*	5"	3	4	6; 4	10; 15
2	16 03	1 45	42,0	26	11	10	4	6	4; 6	16; 14
3	16 06	3 10	43,0	27	12	15	6	2	6; 10	18; 16
4	16 09	3 00	40,0	28	13	20	9	4	10; 6	16; 18
5	16 12	3 30	41,5	29	14	25	6	6	4; 10	10; 15
6	16 15	3 45	42,5	30	15	30	4	2	10; 4	14; 16
7	16 18	4 00	43,5	31	16	25	3	4	6; 4	16; 18
8	16 21	4 12	40,5	32	17	20	4	6	4; 6	15; 10
9	16 24	4 28	41,0	33	18	15	6	2	6; 10	14; 16
10	16 27	4 35	42,0	34	19	10	9	4	10; 6	16; 18
11	16 30	4 42	43,0	35	20	5	4	6	6; 10	15; 10
12	16 33	4 50	40,0	34	21	10	6	2	4; 10	16; 14
13	16 36	4 55	41,5	33	22	15	9	4	10; 4	18; 16
14	16 39	5 00	42,5	32	23	20	3	6	6; 4	10; 14
15	16 42	5 02	43,5	31	24	25	4	2	4; 6	14; 10
16	16 45	5 05	40,5	30	25	30	6	4	6; 10	15; 10
17	16 48	5 24	41,0	29	26	25	9	6	10; 6	10; 15
18	16 51	5 17	42,0	28	27	20	3	2	4; 10	16; 18
19	15 48	5 30	43,0	27	28	15	4	4	10; 4	18; 16
20	15 51	5 32	40,0	26	29	10	6	6	6; 4	10; 15
21	15 54	5 33	41,5	25	30	5	9	2	4; 6	16; 14
22	15 57	5 35	42,5	26	31	10	3	4	6; 10	16; 18
23	16 01	5 40	43,5	27	32	15	4	6	10; 6	10; 15
24	16 04	5 42	40,5	28	33	20	6	2	4; 10	16; 18
25	16 05	5 45	41,0	29	34	25	9	4	10; 4	14; 16
26	16 10	5 47	42,0	30	35	30	3	6	6; 4	16; 14
27	16 15	5 51	43,0	31	36	25	4	2	4; 6	15; 10
28	16 20	5 53	40,0	32	37	20	6	4	6; 10	10; 15
29	16 25	5 58	41,5	33	38	15	9	6	10; 5	16; 18
30	16 28	6 01	42,5	34	39	10	4	4	4; 10	18; 16

Данные для решения задач, номера которых не указаны в таблице, общие для всех студентов.

Таблица 3

Значения t_β в зависимости от β и *n*-1

β / $n-1$	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,31	12,71	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,77	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,943	2,45	3,14	3,71
7	1,895	2,36	3,00	3,50
8	1,860	2,31	2,90	3,36
9	1,833	2,26	2,82	3,25
10	1,812	2,23	2,76	3,17
11	1,796	2,20	2,72	3,11
12	1,782	2,18	2,68	3,06
13	1,771	2,16	2,65	3,01
14	1,761	2,14	2,62	2,98
15	1,753	2,13	2,60	2,95
16	1,746	2,12	2,58	2,92
17	1,740	2,11	2,57	2,90
18	1,734	2,10	2,55	2,88
19	1,729	2,09	2,54	2,86
20	1,725	2,09	2,53	2,84
21	1,721	2,08	2,52	2,83
22	1,717	2,07	2,51	2,82
23	1,714	2,07	2,50	2,81
24	1,711	2,06	2,49	2,80
25	1,708	2,06	2,48	2,79
26	1,706	2,06	2,48	2,78
27	1,703	2,05	2,47	2,77
28	1,701	2,05	2,47	2,76
29	1,699	2,04	2,46	2,76
30	1,697	2,04	2,46	2,75

Таблица 4

Варианты индивидуальных задач для выполнения контрольной работы 4 – «Уравнивание системы теодолитных ходов с одной узловой точкой»

№ варианта	Название линии	Длина линии, *м*	Вершина угла	Значение угла
1	2	3	4	5
1	B–1 D–7	198,08 177,77	B D	168° 33,5' 181 08,0
2	1–2 7–6	223,78 211,02	1 7	210 26,5 143 19,0
3	2–3 6–5	198,79 222,55	2 6	193 02,5 219 51,0
4	3–4 5–8	209,37 232,92	3 5	140 45,0 197 23,0
5	4–5 8–F	172,49 228,54	4 8	240 49,5 151 56,5
6	5–8 D–7	236,12 177,17	5 D	107 47,0 181 08,5
7	B–1 7–6	197,38 210,02	7 B	143 16,0 168 30,5
8	6–5 1–2	221,75 223,08	6 1	219 46,0 210 23,5
9	5–8 2–3	235,17 197,94	5 2	197 20,0 192 59,5
10	F–8 3–4	228,02 208,85	F 3	205 47,5 140 41,5
11	4–5 D–7	173,07 176,96	4 D	240 50,0 181 07,5
12	5–8 7– 6	234,98 210,53	5 7	107 46,0 143 18,5
13	8–F 6–5	227,95 222,93	8 6	151 57,5 219 51,5
14	B–1 5–8	197,26 236,01	F 5	205 48,0 197 22,5
15	1–2 8–F	223,92 228,33	B 8	168 33,0 151 57,0
16	2–3 D–7	198,86 177,45	1 F	210 27,0 205 47,0
17	3–4 7–6	209,58 210,39	2 D	193 03,0 181 07,0
18	4–5 6–5	172,59 222,82	3 7	140 44,0 143 19,5
19	5–8 1–2	236,32 222,85	4 6	240 50,5 219 46,5
20	8–F 2–3	227,82 198,46	5 8	107 46,5 151 55,5
21	B–1 D–7	198,08 177,77	5 8	107 46,5 151 55,5
22	1–2 7–6	223,78 211,02	4 6	240 50,5 219 46,5
23	2–3 6–5	198,79 222,55	3 7	140 44,0 143 19,5
24	3–4 5–8	209,37 232,92	2 D	193 03,0 181 07,0

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5
25	4–5 8–F	172,49 228,54	1 F	210 27,0 205 47,0
26	5–8 D–7	236,12 177,17	B 8	168 33,0 151 57,0
27	B–1 7–6	197,38 210,02	F 5	205 48,0 197 22,5
28	6–5 1–2	221,75 223,08	8 6	151 57,5 219 51,5
29	5–8 2–3	235,17 197,94	5 7	107 46,0 143 18,5
30	F–8 3–4	228,02 208,85	4 D	240 50,0 181 07,5
31	4–5 D–7	173,07 176,96	F 3	205 47,5 140 41,5
32	5–8 7– 6	234,98 210,53	5 2	197 20,0 192 59,5
33	8–F 6–5	227,95 222,93	6 1	219 46,0 210 23,5
34	B–1 5–8	197,26 236,01	7 B	143 16,0 168 30,5
35	1–2 8–F	223,92 228,33	5 D	107 47,0 181 08,5
36	2–3 D–7	198,86 177,45	4 8	240 49,5 151 56,5
37	3–4 7–6	209,58 210,39	3 5	140 45,0 197 23,0
38	4–5 6–5	172,59 222,82	2 6	193 02,5 219 51,0
39	5–8 1–2	236,32 222,85	1 7	210 26,5 143 19,0
40	8–F 2–3	227,82 198,46	B D	168º 33,5' 181 08,0
41	B–1 D–7	198,08 177,77	5 8	107 46,5 151 55,5
42	2–3 6–5	198,79 222,55	3 7	140 44,0 143 19,5
43	5–8 D–7	236,12 177,17	B 8	168 33,0 151 57,0
44	5–8 2–3	235,17 197,94	5 7	107 46,0 143 18,5
45	5–8 7– 6	234,98 210,53	5 2	197 20,0 192 59,5
46	1–2 8–F	223,92 228,33	5 D	107 47,0 181 08,5
47	4–5 6–5	172,59 222,82	1 7	210 26,5 143 19,0
48	B–1 D–7	198,08 177,77	4 8	240 49,5 151 56,5
49	3–4 5–8	209,37 232,92	6 1	219 46,0 210 23,5
50	B–1 7–6	197,38 210,02	4 D	240 50,0 181 07,5

Таблица 5

Исходные данные

№ пунктов	Координаты, *м*	
	X	*Y*
A	+4519,83	+5204,38
B	4584,11	5462,18
C	6014,73	6171,34
D	5612,65	6165,08
E	4858,23	7006,76
F	4897,84	6685,61

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Функцию, имеющую конечную производную, называют дифференцируемой. Процесс вычисления производной называется ***дифференцированием***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x),$$

где $f(x) - f(x_0)$ – приращение функции на величину $x - x_0$.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные временно постоянны. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ ***частной производной по переменной x*** называется производная этой функции по ***x*** при постоянном ***y***. Обозначается частная производная по x следующим образом: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$

Аналогично ***частной производной функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной y*** называется производная этой функции по ***y*** при постоянном ***x***. Обозначения: z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Выполнение заданий предполагает безусловное знание следующих основных правил дифференцирования.

1. Производная суммы дифференцируемых функций равна сумме производных:

$$(U + V)' = U' + V'.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot U)' = C \cdot U',$$

где $C - const$.

3. Если U и V - дифференцируемые функции, то существует производная их произведения, которая вычисляется по формуле:

$(U \cdot V)' = U'V + V'U$.

4. Если U и V – дифференцируемые функции, то существует производная частного, которая вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}, \ V \neq 0 .$$

Для эффективного дифференцирования сложных функций полезна таблица 3.1. основных элементарных функций, аргумент которых есть тоже функция. Итак, пусть $y = f(x)$, где $U = U(x)$. Тогда

Таблца 3.1

1. $C' = 0$, $C - const$	2. $\left(U^n\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$, $n - const$
3. $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{1}{U^2} \cdot U'$	4. $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
5. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$	6. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
7. $(tgU)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$	8. $(ctgU)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
9. $(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$	10. $(\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
11. $(arctgU)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$	12. $(arcctgU)' = -\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$
13. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a - const$	14. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
15. $(\log_a U)' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a - const$	16. $(\ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U'$

Пример.

Дана функция $\Delta S = 2D\sin^2\frac{\nu}{2}$. Найти $\frac{\partial(\Delta S)}{\partial D}$ и $\frac{\partial(\Delta S)}{\partial \nu}$.

Решение.

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial D} = 2(D)'\sin^2\frac{\nu}{2} = 2\sin^2\frac{\nu}{2};$$

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial \nu} = 2D\left(\sin^2\frac{\nu}{2}\right)'\cdot\left(\frac{\nu}{2}\right)' = 4D\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2D\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu}{2}.$$

Учебное издание

Журавлев А.Ф., Каширкин Ю.Ю., Ктиторов Э.М.,
Парамонова Е.Г., Симонян В.В.

ГЕОДЕЗИЯ

ЧАСТЬ III

Методические указания по выполнению контрольных работ

Для студентов очного и заочного обучения по специальностям:
310900 – «Землеустройство»
311000 – «Земельный кадастр»
311100 – «Городской кадастр»

Редакционно-издательский отдел ГУЗа

Подписано в печать 29.12.09. Сдано в производство 23.03.2010.
Формат 60х84$^{1}/_{16}$. Объем 4,25 п.л., 3,8 уч.-изд.л.
Бумага офсетная. Тираж 100. Заказ №____

Участок оперативной полиграфии ГУЗа
Москва, ул. Казакова, 15